الإحصاء التطبيقي

الدكتور

إبراهيم محمد مهدي

أستاذ الرياضيات والإحصاء الاكتوارى
وعميد كلية التجارة جامعة المنصورة (سابقاً)

الدكتورة

فاطمة على عبد العاطى

أستاذ الإحصاء بكلية التجارة
جامعة المنصورة

الدكتورة

مرفت طلعت المحلاوى

أستاذ الإحصاء بكلية التجارة
جامعة المنصورة

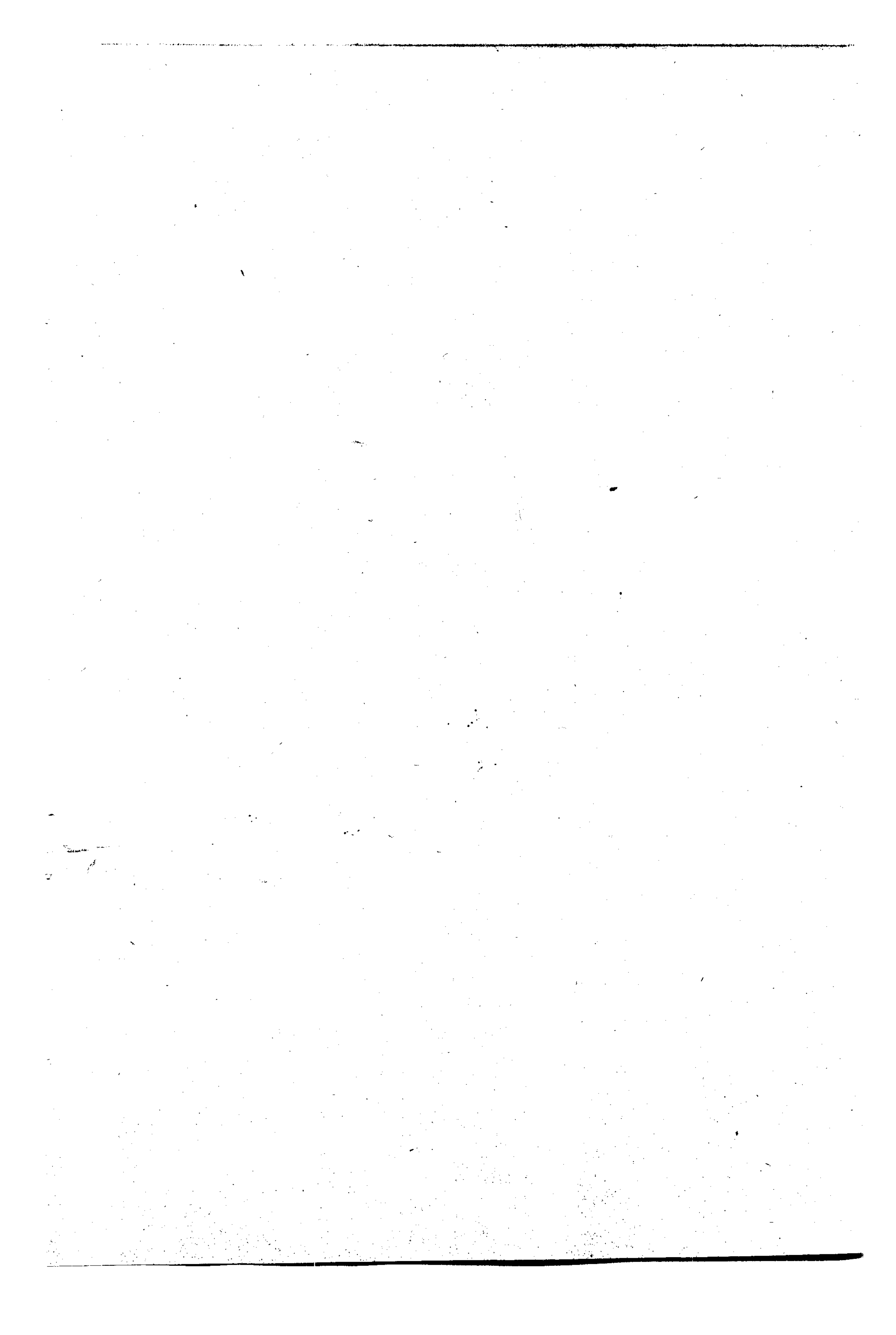
2006 – 2007

الناشر: مكتبة الجلاء الجديدة بالمنصورة
تليفون: 0502247360

بسم الله الرحمن الرحيم

وقل ربِّ زدني علما

صدق الله العظيم



مقدمــة:

تـأتي هـذه الطبعـة فـي إطـار مـا سـبق أن أصـدر مـن طبعـات فـي مجـال الإحصاء التطبيقي والاستنتاج الإحصائي. ولكم ما يميز هذه الطبعة عن سابقاتها هو الاتجاه إلى تقديم بعض الأساليب الإحصائية التطبيقية فى مجال التنبؤ واتخاذ القرارات فى ظل عدم اليقين.

وبـالرغم مـن محدوديـة حجـم هـذه الطبعـة إلا أنـه روعـي فـي اختيـار الموضوعات التي تناولتها التدرج والتكامل وألا يكون الإيجاز فى العرض على حساب الأساسيات، من اجل ذلك اختير محتوى هذه الطبعة ليشمل الفصول التالية:

الفصل الأول : الاختبارات اللامعلمية.

الفصل الثانى : الأرقام القياسية.

الفصل الثالث : تحليل التباين.

الفصل الرابع : الانحدار البسيط والارتباط البسيط.

الفصل الخامس : مقدمة فى تحليل السلاسل الزمنية.

وكان الهدف من هذه الفصول الخمسة هو تحقيق اتساع الرؤية عند اتخاذ القرار سواء على أساس تعدد العينات أو تعدد المتغيرات أو بتوفير ظروف متشابهة للمتغيرات عند بدء التجربة أو تحريرها من أثر عدم التجانس السابق عند جمع المعلومات.

وانه وإن كان الهدف أساسا من إعداد هذا الكتاب هو الدارس والباحث فى المجالات التجارية والاقتصادية وهو ما قد تعكسه العديد من الأمثلة والتطبيقات

التي حفلت بها هذه الطبعة، الا أن الحاجة إلى هذه الأساليب الإحصائية للدارس والباحث فى مجالات العلوم التطبيقية والإنسانية كالعلوم الزراعية والتربية والاجتماع بل وبعض الدراسات الطبية والصحية لا تقل إلحاحا عنها فى مجالات الدراسات والبحوث الإدارية والاقتصادية فليس أيسر من إحلال متغير محل أخر بما يتفق مع مجالات التطبيق. وهذا يميز الإحصاء كأسلوب رقمى للقياس والتحليل والتشخيص عن العلوم الأخرى.

ولعلنا نكون قد وفقنا بفضل من الله فى تحقيق بعض ماكنا نهدف إليه من إعداد لهذا المرجع المحدود.

والسلام عليكم ورحمة الله وبركاته،

أ.د. إبراهيم محمد مهدى

أ.د. فاطمة على عبد العاطى

أ.د. مرفت طلعت المحلاوى

المنصورة فى أغسطس 2006

المحتويات

الجزء الأول

الفصل الأول: الاختبارات اللامعلمية

الفصل الثانى: الأرقام القياسية

أ.د. مرفت طلعت المحلاوى

الاختبارات اللامعلمية
Non- parametric Tests

أن الاختبارات التي تهتم بدراسة معلمة (أو معلمات) المجتمع الاحصائي يطلق عليها اختبارات معلمية. وهناك نوعان من الاختبارات الاحصائية تتم معاملتهما علي انهما اختبارت لامعلمية وهما: اختبارات التوزيعات الحرة التي تستخدم عند عدم معرفة شكل التوزيع الاحتمالي للمجتمع ولاتضع اي افتراضات علي مجتمع المعاينة ، واختبارات لامعلمية بما تعنيه الكلمة وهي اختبارات لا تعتمد على المعلمة المجهولة للمجتمع ، وبصرف النظر عن التمييز بين هذان النوعان من الاختبار فإن كلاهما سيتم معاملته علي انه اختبار لامعلمي.

وهذه الاختبارات يتم تطبيقها في الحالات الاتية:

1- إذا كانت الفرضية المطلوب اختبارها لاتتضمن معلمة المجتمع.
2- المقياس المستخدم فى البيانات يكون اسمي اوترتيبى على الأقل .
3- إن لم تتوافر الشروط المطلوبة لتطبيق الاختبارات المعلمية.

يفضل استخدام الاختبارات اللامعلمية من الناحية التطبيقية في حالة

- إذا كان حجم العينة أقل من 50 وتباين المجتمع غير معروف وقمنا برسم المنحني التكراري وكان غير معتدلا (بيانات العينة تتوزع توزيعاغيرطبيعيا).
- إذا امكن حساب معامل الالتواء وكانت قيمة هذا المعامل كبيرة.

وسنتناول في هذا الفصل بعض هذه الاختبارات

- اختبار عينة واحدة (ذو الحدين- اختبار كا^2).
- اختبار عينتين غير مستقلتين(اختبار الاشارة-اختبار ماكنمار).
- اختبار كا^2 للاستقلال وللتجانس.
- المقارنة بين عدد من المجموعات المترابطة (اختبار فريدمان).
- المقارنة بين عدد من المجموعات المستقلة(اختبار كروسكال -واليز).

(1-1) اختبار عينة واحدة:

(1-1-1) اختبار ذو الحدين(اختبار الاشارة Sign Test) :

يستخدم **اختبار الاشارة** في اختبار فرض العدم الخاص بعينة واحـــدة ، وذلك عندما تكون البيانات وصفية ثنائية التصنيف، فهو يـــستخدم فـــي جميـــع الحالات التي تتطلب استجابة ذات اختيار واحد من بين اختيارين، مثل المعيـــب والسليم، التدخين وعدم التدخين، النجاح والرسوب، أرغب أو لا أرغب، نعم أو لا ،صح أو خطأ، وجود خاصية معينة أو عدم وجود هذه الخاصية...الخ.

في حالة العينات الصغيرة ن ≤ 25:

خطوات الاختبار:

1- تحديد فرض العدم والفرض البديل

فرض العدم : ل= $ل_1$ حيث ل احتمال حدوث الحدث، $ل_1$ احتمال معين

الفرض البديل: ل≠ $ل_1$ أو ل> $ل_1$ أو ل< $ل_1$

ويمكن صياغة الفرضيات بدلالة الوسيط

2- نحدد س وهي عدد الاشارات الموجبة أو السالبة أيهما أقل ثم يستخدم جدول التوزيع التجميعي لتوزيع ذوالحدين لايجاد

$$ح\ (س \leq س) = مجـ\ ^{ن}ق_{س}\ ل^{س}\ (1-ل)^{ن-س} \qquad (1-1)$$

3-تحديد مستوي المعنوية = 0.05

4- اتخاذ القرار:

في حالة اختبار طرفين:

نرفض فرض العدم عند مستوي معنوية α إذا كان

$$ح\ (س \leq س|ن\ ،\ ل= 0.5) \leq \frac{\alpha}{2} \qquad (2-1)$$

في حالة اختبار طرف واحد:

نرفض فرض العدم عند مستوي معنوية α إذا كان

ح (س≥ س| ن ، ل= 0.5) ≤ α (3-1)

مثال(1-1):

افترض ان 7 طلبة اجابتهم كانت نعم في احد اسئلة استبيان تقييم الطالب علي سؤال يتطلب الاجابة بنعم أو لا ، 3 كانت اجابتهم لا ، أوجد ح (س≥ س) ثم اختبر أن نسبة الاجابة (لا) تختلف في مجتمع الطلبة عن 0.5.

الحل:

1- فرض العدم : ل= 0.5

الفرض البديل: ل≠0.5

2- هنا نجد أن ن= 10، س= 3 ويوضح جدول التوزيع التجميعي لتوزيع ذوالحدين أن ح (س ≥ 3عندما ن= 10) =0.172 وذلك تحت فرض العدم صحيح اي باعتبار ان ل= 0.5 .

3- مستوي المعنوية = 0.05 ، حجم العينة=10

4-اتخاذ القرار:

بما أن نوع الأختبار اختبار طرفين ، ح (س ≥ 3| ن= 10 ، ل=0.5) =0.172 اكبرمن 0.025 اذن نقبل فرض العدم أن نسبة الاجابة (لا) لا تختلف في مجتمع الطلبة عن نسبة الاجابة (نعم) أي نقبل ان احتمال الاجابة لا في المجتمع المحدد لا يختلف عن 0.5 وذلك بدرجة ثقة 95%.

مثال(1-2):

افترض ان 16 طالب اجابتهم كانت نعم في احد اسئلة استبيان تقييم الطالب علي سؤال يتطلب الاجابة بنعم أو لا ، 2 كانت اجابتهم لا ، أوجد ح (س ≥ س) ثم اختبر أن نسبة الاجابة (لا) أقل في مجتمع الطلبة عن نسبة الاجابة بنعم مستخدما مستوي معنوية 0.01.

الحل:

من جدول التوزيع التجميعي لتوزيع ذوالحدين

ح (س≥ س|ن=18، ل=0.5) =0.001

1- فرض العدم : ل = 0.5

الفرض البديل: ل < 0.5

2- هنا نجد أن ن= 18، س= 2 ، ح (س ≥ 2عندما ن= 18) =0.001 وذلك تحت فرض العدم صحيح اي باعتبار ان ل= 0.5 .

3- مستوي المعنوية =0.01 ، حجم العينة=18

4-اتخاذ القرار:

بما أن نوع الاختبار اختبار طرف واحد فإن الاحتمال المحسوب = 0.001 اقل من 0.01 اذن نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل أن نسبة الاجابة (لا) أقل في مجتمع الطلبة عن نسبة الاجابة (نعم) أي نقبل ان احتمال موافقة مجتمع الطلبة علي سؤال الاستبيان اكبر من احتمال عدم الموافقة وذلك بدرجة ثقة 95%.

مثال(1-3):

قامت 6 من طالبات الباليه باتباع نظام معين في الاكل(رجيم) وذلك محاولة لتخفيف أوزانهم مكانت النتائج كالتالي:

جدول(1-1)

الوزن قبل وبعد الرجيم

الطالبة	1	2	3	4	5	6
الوزن قبل الرجيم	80	75	77	84	90	70
الوزن بعد الرجيم	75	65	81	72	80	66

وعلي ضوء هذه البيانات هل يمكن القول بأن تنظيم الأكل كان له دور في انخفاض الوزن عند مستوي المعنوية 5%.

الحل:

1- فرض العدم : ل(+) $\geq$ ل(−)

الفرض البديل: ل (+) > ل(−)

جدول(1-2)

الوزن قبل وبعد الرجيم واشارة الفرق

الطالبة	1	2	3	4	5	6
الوزن قبل الرجيم	79	74	73	80	85	69
الوزن بعد الرجيم	75	64	81	72	79	63
اشارة الفرق(قبل- بعد)	+	+	−	+	+	+

2- س=عدد الاشارات السالبة =1 ، ح (س $\leq$ 1عندما ن= 6 ، ل=0.5) =0.109

3- مستوي المعنوية =0.05 ، حجم العينة=6

4-اتخاذ القرار:

حيث أن الاحتمال المحسوب 0.109 اكبر من 0.05، اذن نقبل فرض العدم أن هذا النظام من الرجيم لا يؤدي الي انخفاض الوزن وذلك بدرجة ثقة 95%.

مثال(1-4):

نفرض ان البيانات الاتية تمثل عينة من أوزان الاطفال حديثي الولادة باحد المستشفيات

جدول(1-3)

أوزان الاطفال حديثي الولادة

المولود	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
الوزن	3.2	2.3	1.9	3.3	2.8	3.1	3.4	2.8	3	3.9	2.6

هل يمكن القول بان وسيط أوزان المواليد بمجتمع المستشفي التي اخذت منها العينة $ر_2$ يختلف عن 3.4 كجم عند مستوي معنوية 5%

الحل:

فرض العدم : $ر_2 = 3.4$

الفرض البديل: $ر_2 \neq 3.4$

احصاءة الاختبار:

لايجاد احصاءة الاختبار نوجد اشارة (الوزن- الوسيط) وإذا كان هناك تطابق بين الوسيط واحدي القيم تهمل هذه المفردة من الدراسة. وذلك كما يلي:

جدول(1-4)

اشارة (الوزن- الوسيط)لاوزان الاطفال حديثي الولادة

المولود	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
الاشارة	-	-	-	-	-	-	0	-	-	+	-

ن= 10 = عدد الاشارات الموجبة + عدد الاشارات السالبة

ح (س ≤ 1عندما ن= 10 ، ل=0.5) =0.011

القرار:

حيث أن الاحتمال المحسوب 0.011 اقل من 0.025، اذن نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل أن وسيط أوزان المواليد بمجتمع المستشفي الذي اخذت منه العينة ر2 يختلف عن 3.4 كجم وذلك بدرجة ثقة 95%.

العينات الكبيرة:

لايمكن استخدام جدول التوزيع التجميعي لتوزيع ذوالحدين عندما يكون حجم العينة اكبر من 25. في هذه الحالة نستخدم احصائية التوزيع الطبيعي المعياري(ى) حيث أن : عندما ن > 25

س ~ توزيع طبيعي (μ = ن ل ، σ^2 = ن ل(1-ل))

$$ى = \frac{(س \pm 0.5) - \mu}{\sigma} \sim \text{توزيع طبيعي معياري } (\mu = \text{صفر}، \sigma^2 = 1) \qquad (4-1)$$

وسبب طرح واضافة 0.5 أن التوزيع ذو الحدين يتضمن متغير متقطع، وللتصحيح من اجل تحويله الي متغير متصل ى ينبغى ان نطرح 0.5 من س عندما تكون س > μ ، وعندما تكون س أقل من μ فاننا نضيف 0.5 الي س، كما يمكن استخدام احصائية الاختبار ى اذا كان حجم العينة **ن ≥ 25.**

مثال(1-5):

نفرض أن لدينا درجات عينة من 15 طالب في مادة معينة كما يلي:

20 ،42، 18، 21، 22، 35، 19، 18، 26، 20، 21، 32، 22، 20، 24

والمطلوب اختبار هل هذه العينة مسحوبة من مجتمع وسيطه 25 ضد الفرض البديل القائل ان الوسيط في المجتمع اقل من 25 وذلك باحتمال 95% مستخدما احصائية الاختبار ى.

الحل:

فرض العدم : ر$_2$ = 25

الفرض البديل: ر$_2$ < 25

احصاءة الاختبار:

لايجاد احصاءة الاختبار نوجد اشارة (الدرجة– الوسيط) وذلك كما يلي:

جدول(1-5)

اشارة (الدرجة– الوسيط) لدرجات عينة من 15 طالب في مادة معينة

الطالب	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
الاشارة	−	+	-	-	-	+	−	−	+	−	−	+	−	−	−

ن= 15 = عدد الاشارات الموجبة + عدد الاشارات السالبة

ر=4 ، ن ل =15×0.5= 7.5 ، بما ان ر < 7.5 اذن نضيف 0.5 الي ر تصبح 4.5

$$ى = \frac{7.5-4.5}{\sqrt{3.75}} = -1.55$$

المنطقة الحرجة :

بما أن نوع الاختبار اختبار طرف ايسر لان الفرض البديل (اقـل مـن) ، α =0.5 ∴ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ى الجدولية = −1.65

القرار:

حيث أن ى= −1.55 اكبر من −1.65 ، اذن نقبل فرض العـدم القائـل ان درجات الطلبة مسحوبة من مجتمع وسيطه 25 وذلك بدرجة ثقة 95%.

(2−1−1) اختبار كا^2 Chi-Square Tests

اختبار جودة التوفيق " Goodness of Fit Test "

يستخدم في الكشف عن وجود فروق ذات دلالة احصائية بين الأعـداد الملاحظة من الاشياء أو الاستجابات الواقعة في كل تصنيف والعـدد المتوقـع المعتمد علي الفرض الصفري، فهو يستخدم كطريقة احصائية للمقارنـة بـين التكرارات الملاحظة والمتوقعة. ويستخدم في حالة البيانات الاسمية حيث يصنف أفرد العينة عادة الي مجموعات متميزة ويمثل كل فرد في كل مجموعة تكرارا خاص به ولايكون للفرد أكثر من تكرار واحد في احدي هذه المجموعات. ومن الامثلة علي هذا النوع من البيانات الاسمية بيانات الاستبيانات التي تحتوي علي فقرات يتطلب الاجابة عن كل فقرة منها اختيار واحد من عدة بدائل مثل : أوافق جدا ،أوافق، ليس لي رأي، لا أوافق أو اختيار بديل من بين عدة بدائل كنـوع الدراسة أو التخصص الذي يرغب الطالب الالتحاق به، ومن هنا فـإن اختبـار كا^2 يختلف عن اختبار ذو الحدين الذي يقتصر علي واحد من احتمالين.

خطوات الاختبار :

1- فرض العدم: مجموعة المشاهدات تم اختيارها وفقاً لتوزيع احتمالي معين.
الفرض البديل: ان مجموعة المشاهدات لا تتفق مع هذا التوزيع

2- إحصاء الاختبار

$$كا^2 = مجـ \frac{(م_ر - ت_ر)^2}{ت_ر} \quad (5-1)$$

حيث:

$م_ر$ التكرار المشاهد المناظر للنتيجة ر.

$ت_ر$ التكرار المتوقع المناظر للنتيجة ر.

$ت_ر$= ن $ح_ر$ = حجم العينة × احتمال أن عائد المحاولة هو الناتج رقم ر.

والتكرار المتوقع المناظر لكل نتيجة يجب ان لا يقل عن 5 وإذا حدث وكان أحد التكرارات المتوقعة اقل من 5 فإننا نقوم بتجميع التكرارات.

3- المنطقة الحرجة : $كا^2$ > $كا^2$ (عدد المشاهدات -1 ، α)

4- قاعدة الرفض:

نرفض فرض العدم إذا كانت $كا^2$المحسوبة > $كا^2$ (عدد المشاهدات -1، α)

نلاحظ ما يأتي على صيغة $كا^2$:

1- إذا كان التكرار المشاهد = التكرار المتوقع ، وذلك لكل نتيجة من النتائج فان قيمة $كا^2$ تكون مساوية للصفر ويمكن في هذه الحالة قبول فرض العدم.

2- كلما زاد الفرق بين التكرار المشاهد والتكرار المتوقع كلما أدى ذلك إلى كبر قيمة $كا^2$ ولا يمكن أن يكون مربع الفرق مقداراً سالباً ، وحيث أننا نرفض فرض العدم عندما تكون قيمة إحصاء الاختبار $كا^2$ كبيرة فإن منطقة

الرفض تكون دائما في الطرف الأيمن من المنحنى الاحتمالي لتوزيع مربع كاى.

3- من الملحوظة (2) السابقة نستنتج ان الاختبار في هذه الحالة اختبار طرف واحد هو الطرف الأيمن.

مثال (1-6):

اختار أحد الباحثين عينة من 800 طالب من طلبة الثانوية العامة فكـان توزيعهم حسب رغبتهم في مشاهدة برامج التليفزيون كالتالي :

جدول(1-6)

توزيع 800 طالب من طلبة الثانوية العامة حسب رغبتهم في مشاهدة برامج التليفزيون

البرامج	الثقافية	التعليمية	الترفيهية	الرياضية
عدد الطلبة	133	60	439	168

هل يتفق هذا التوزيع مع توزيع أفراد المجتمع كله حسب رغبتهم في مشاهدة البرامج وهو 3 : 1 : 9 : 3 وذلك عند مستوى معنوية 5% .

الحل :

1- فرض العدم : $ح_1 = 16/3$ ، $ح_2 = 16/1$ ، $ح_3 = 16/9$ ، $ح_4 = 16/3$

الفرض البديل : واحد او اكثر من النسب لا تساوى النسب المعطاه في فرض العدم ، حيث ح تمثل نسبة مشاهدة برنامج معين.

2- **توجد إحصاء الاختبار.**

جدول(1-7)

التكرار المشاهد والمتوقع لبرامج التليفزيون

البرامج	العدد المشاهد (م)	العدد المتوقع (ت)	^{2}(م-ت)	(م-ت)^2/ت
الترفيهية	439	450	121	0.27
الرياضية	168	150	324	2.16
الثقافية	133	150	289	1.93
التعليمية	60	50	100	2.00
المجموع				6.36

كا^2 = 6.36

3-المنطقة الحرجة هي : كا^2 > كا^2 (3، 0.05)= 7.81

4-قاعدة القرار :

بما أن كا^2 = 6.36 < كا^2(3 ، 0.05) = 7.81 فأننا لا يمكن رفض فرض العدم بمعنى أن البيانات المشاهدة لا تختلف اختلافاً كافياً عن ما هو متوقع في فرض العدم لكي ترفض هذه النسب وذلك بدجة ثقة 95%.

مثال (1-7) :

البيانات الآتية تبين عدد الأخطاء المطبعية في 100 صفحة متتالية من كتاب معين.

جدول (1-8)

عدد الأخطاء المطبعية في 100 صفحة

عدد الأخطاء المطبعية	صفر	1	2	3	4	5
عدد الصفحات	50	30	12	5	2	1

هل يمكن القول بأن الأخطاء المطبعية تتبع توزيع بواسون مستخدما مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

الحل :

1- فرض العدم : عدد الأخطاء المطبعية تتبع توزيع بواسون .

الفرض البديل : عدد الأخطاء المطبعية لا تتبع توزيع بواسون .

2- نعرف الدالة الاحتمالية لتوزيع بواسون وهي :-

$$ح(س) = \frac{هـ^{-م} م^{س}}{س!} \qquad س = 0 ، 1 ، 2 ، ...$$

وهو توزيع له معلمة واحدة هي م وبالتالي يمكن تقديرها باستخدام مشاهدات العينة وافضل تقدير لها الوسط الحسابي لمشاهدات العينة $\bar{س}$.

$$\bar{س} = \frac{مجـ س ك}{مجـ ك} = \frac{1}{100} (صفر(50)+1(30)+2(12)+3(5)+4(2)+5(1))$$

$$= 0.82$$

ونحسب التكرارات المتوقعة كما يلي :

$$التكرار المتوقع = ن ح = 100 \left(\frac{هـ^{-0.82} (0.82)^{س}}{س!} \right)$$

حيث : س = 0 ، 1 ، 2 ، 3 ، 4 ، 5 ، $هـ^{-0.82} = 0.4404$

وتوضع النتائج في الجدول الآتي :

جدول (1-9)

التكرار المشاهد والمتوقع لعينة من 100 صفحة

عدد الأخطاء	التكرار المشاهد $م_ر$	التكرار المتوقع $ت_ر$
صفر	50	44.04
1	30	36.11
2	12	14.81
3	5	4.05
4	2	0.83
5	1	0.16

ويلاحظ أن التكرارات المتوقعة الثلاثة الأخيرة كل منها اقل من خمسه وبتجميعها فان التكرارات المتوقعة والمشاهدة تكون كما في جدول(1-10).

جدول (1-10)

التكرارات المشاهدة والمتوقعة بعد ضم الفئات الأقل من خمسة تكرارات متوقعة

عدد الأخطاء المطبعية	التكرر المشاهد $م_ر$	التكرار المتوقع $ت_ر$	$(م_ر - ت_ر)^2$	$(م_ر - ت_ر)^2/ت_ر$
صفر	50	44.04	35.52	.,807
1	30	36.11	37.33	1.033
2	12	14.81	7.90	.,533
3 أو أكثر	8	5.04	8.76	1.738
				4.111

$كا^2 = 4.111$

3- المنطقة الحرجة : $كا^2 > كا^2$(عدد الفئات-عدد المعالم المقدرة -1 ، α)

$كا^2 >$ $(كا^2(4-1-1 ، 0.05) = كا^2(2، 0.05) = 5.991)$

4- اتخاذ القرار :

نقبل فرض العدم حيث أن قيمة إحصاء الاختبار (4.111) أقل من القيمة الحرجة(5.991).أي أن الأخطاء المطبعية تتبع توزيع بواسون بدرجة ثقة 95%.

مثال(1-8):

عينة عشوائية من 100 طالب جامعي طلب منها تقدير معدل النجاح في دورة تدريبية معينة لمادة الحاسب الآلي، وكان مقياس التقدير من صفر إلى 100 والنتائج هي كما في الجدول التالي :

جدول(1-11)

معدل نجاح 100 طالب

في دورة تدريبية معينة لمادة الحاسب الآلي

فئات المقياس	أقل من30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100	الكلي
التكرار	صفر	8	16	13	23	15	16	9	100

والمقياس متغير متقطع ، وفئة المقياس (أقل من 30) تشمل المقاييس من صفر إلى أقل من 30، و المطلوب لختبار الفرض بأن التقديرات المعطاه من العينة من الطلبة تتبع التوزيع الطبيعي (استخدم مستوى معنوية 5%)

الحل :

1- فرض العدم : المقياس يتبع توزيع طبيعي

الفرض البديل : المقياس لا يتبع التوزيع الطبيعي

2- نستخدم $\bar{س}$ ، $ع^2$ كتقديرات للمتوسط μ ، والتباين σ^2

ونجد أن $\bar{س} = 65.5$ ، $ع^2 = 309.76$

ونوجد الاحتمال المناظر لكل فئة والتكرار المتوقع لها. مع استخدام التصحيح المتصل وهو (س– 5,.) لكل قيمة من قيم المتغير المتقطع.

$$ح (س < 30) = ح (ى < \frac{29.5 - 65.5}{\sqrt{309.76}})$$

$$= ح (ى < - 2.05) = 02,.$$

$$ح (30 \leq س < 40) = ح (- 2.05 < ى < -1.48) = 049,.$$

وباستمرار هذه الطريقة نستطيع أن نحصل على الاحتمالات المناظرة لكل فئة وبضرب هذه الاحتمالات في ن = 100 نحصل على التكرارات المتوقعة كما في الجدول التالي.

جدول(1–12)

التكرارات المشاهدة والمتوقعة

الفئات	م ر	ت ر
أقل من 03	0	2
30–40	8	4.9
40–50	16	11.2
50–60	13	18.6
60–70	23	22.4
70–80	15	19.7
80–90	16	12.5
90–100	9	6
100 فأكثر	0	2.7
المجموع		

نلاحظ أن الفئة الأولى والثانية التكرار المتوقع لها أقل من 5 لذلك يجب ضم الفئتين ، وأيضا الفئة الأخيرة أقل من 5 لذلك يجب ضمها على الفئة السابقة لها مباشرة . وبالتالي نحصل على جدول (1-13) التالي.

جدول(1-13)

التكرارات المشاهدة والمتوقعة بعد ضم الفئات الأقل من خمسة تكرارات متوقعة

الفئات	م ر	ت ر	$(م_ر - ت_ر)^2 / ت_ر$
أقل من 40	8	6.9	0.175
50-40	16	11.2	2.057
60-50	13	18.6	1.686
70-60	23	22.4	0.016
80-70	15	19.7	1.121
90-80	16	12.5	0.980
90فأكثر	9	8.7	0.010
المجموع			6.045

3- المنطقة الحرجة :

$كا^2 > كا^2(7-2-1) = كا^2(4 ، 0.05) = 9.49$

حيث :

عدد الفئات بعد الضم = 7 ، عدد المعالم المقدرة = 2

4- حيث أن $كا^2 = 6.045 < 9.49$ فأننا لا نستطيع رفض فرض العدم بمعنى أن البيانات المشاهدة تتبع التوزيع الطبيعي بدرجة ثقة 95%.

(1-2) اختبار عينتين غير مستقلتين:

(1-2-1) اختبار الاشارة Sign Test

كما يستخدم هذا الاختبار للمقارنة بين عينتين غير مستقلتين، والتي هي في معظم الاحوال عينة واحدة أو مجموعة واحدة من الافراد، حيث كل زوج من قياسات هذه العينة تم الحصول عليه من نفس المفردة مثل عدد دقات قلب مريض قبل وبعد تعاطي الدواء، او الوزن قبل وبعد الرجيم ...الخ.

مثال(1-9):

الاتي بيانات خاصة بعينتين غير مستقلتين المطلوب اختبار هل هناك فرقا معنويا بين العينتين أم لا مستخدما احصائية الاختبار ى، ومستوي المعنوية 5%.

العينة س	50.1	51.2	51.8	53.2	54.6	52.7	56.1	54.3	54.2	52.6
العينة ص	53.3	50.5	61.2	61.5	54.6	56.8	57.2	57.2	54.8	51.2

الحل:

فرض العدم : لا يوجد فرق بين العينتين

الفرض البديل: يوجد فرق بين العينتين

احصاءة الاختبار:

لايجاد احصاءة الاختبار نوجد اشارة (ص - س) وذلك كما يلي:

جدول(1-14)

اشارة (ص-س)

المفردة	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ص - س	+	-	+	+	0	+	+	+	+	-

ن= 9= عدد الاشارات الموجبة + عدد الاشارات السالبة

ر=2= عدد الاشارات السالبة لانها أقل ، ن ل =9×0.5= 4.5 ، بما ان ر > 4.5 اذن نضيف 0.5 الي ر تصبح 5

$$ى = \frac{1.5-4.5}{\sqrt{\frac{9}{4}}} = -2$$

المنطقة الحرجة :

بما أن نوع الاختبار اختبار طرفين لان الفرض البديل (يختلف) ، α =0.5

∴ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري ى الجدولية =±1.96

القرار:

حيث أن ى=-2 اقل من -1.96 ، اذن نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن هناك فرقا معنويا بين مفردات العينتين وذلك بدرجة ثقة 95%.

(1-2-2) اختبار "ماكنمار" Mcnemar Test

ويستخدم في حالة البيانات الاسمية والترتيبية ويشيع استخدامه غالبا لقياس مدى دلالة التغير الذى يطرأ علي استجابة أفراد العينة من موقف الي موقف اخر. أو قياس مدي تغير اتجاهات الافراد في ظروف معينة. وبواسطة هذا الاختبار يمكن التعرف علي ما اذا كان التغير الحاصل في الاستجابة بعد إجراء تجربه معينة عما كانت عليه تلك الاستجابة قبل اجراء التجربة ذات دلالة احصائية. ويستخدم هذا الاختبار في اختبار الفرضية الصفرية التي تقول أنه ليس هناك تغير ذو دلالة احصائية في الاستجابة وذلك بعد إجراء التجربة.

ولاختبار الفرضية الصفرية تنظم الاستجابات في جدول للتوافق (2x2) كما في الشكل التالي:

جدول(1-15)

جدول للتوافق (2x2) للاستجابات

الاختبار البعدي	الاختبار القبلي	
	+	−
−	أ	ب
+	جـ	د

الخلية (أ) تحتوي علي عدد الحالات الموجبة في الاختبار القبلي وتصبح سالبة في الاختبار البعدي.

الخلية (ب) تحتوي علي عدد الحالات السالبة في الاختبارين القبلي والبعدي علي حد سواء.

الخلية (جـ) تحتوي علي عدد الحالات الموجبة في الاختبارين القبلي والبعدي.

الخلية (د) تحتوي علي عدد الحالات السالبة في الاختبار القبلي واصبحت موجبة في الاختبار البعدي.

ولاختبار الفرضية الصفرية نستخدم اختبار كا^2

$$\text{كا}^2 = \frac{\left(\left|\text{أ} - \text{د}\right| - 1\right)^2}{\text{أ} + \text{د}} \qquad (6-1)$$

ونقارن القيمة المحسوبة بالقيمة الجدولية التى تحدد من جدول توزيع كا^2 بدرجات حرية =1 ومستوي معنوية α .

مثال(1-10):

لنفرض أن باحث أراد دراسة أثر التوجيه الصحي في اتجاهـات طلبـة الجامعة نحو التدخين فاختار هذا الباحث بصورة عشوائية عينة تتألف من (30) طالب وجمعهم في احدي القاعات الدراسية في الجامعة، ثم سألهم عن رأيهم في التدخين وطلب من كل واحد منهم الإجابة بـ (نعم) اذا كان يؤيد التدخين ، وبـ (لا) اذا كان لا يؤيد ذلك. ثم قام بتسجيل اجابة كل فرد من افراد العينة، وبعـد ذلك طلب من أحد الأطباء المختصين إلقاء محاضرة مشفوعة بالصور والأرقام بشأن أخطار ومضار التدخين . وبعد الانتهاء من المحاضرة طلب الباحث مـن الطلبة أن يجيبوا علي نفس السؤال الذي وجهه اليهم قبـل المحاضـرة فكانـت النتائج كما هي مبينة في جدول (1-16) ، ويلاحظ من الجدول ما يلي:

التغير من (نعم) إلي (لا) = 9

التغير من (لا) إلي (نعم) = 2

الاستجابة (نعم) وبقيت (نعم) = 6

الاستجابة (لا) وبقيت (لا) = 13

جدول(1-16)

الاتجاه نحو التدخين قبل وبعد المحاضرة

تسلسل الطلاب	الاتجاه نحو التدخين (قبل الحاضرة)	الاتجاه نحو التدخين (بعد المحاضرة)	التأثير في الاتجاه
1	نعم	لا	+
2	لا	لا	صفر
3	لا	لا	صفر
4	لا	لا	صفر
5	لا	لا	صفر
6	لا	لا	صفر
7	نعم	لا	+
8	نعم	لا	+
9	لا	لا	صفر
10	نعم	لا	+
11	لا	لا	صفر
12	لا	لا	صفر
13	نعم	نعم	صفر
14	نعم	لا	+
15	نعم	لا	+
16	نعم	نعم	صفر
17	لا	لا	صفر
18	لا	لا	صفر
19	نعم	نعم	صفر
20	نعم	لا	+
21	نعم	لا	+
22	نعم	نعم	صفر
23	لا	نعم	-
24	لا	نعم	-
25	لا	لا	صفر
26	لا	لا	صفر
27	نعم	نعم	صفر
28	نعم	نعم	صفر
29	نعم	لا	+
30	لا	لا	صفر

ويمكن وضع هذه الأرقام في الجدول الرباعي كما في الشكل التالي:

قبل المحاضرة	بعد المحاضرة −	بعد المحاضرة +
+	أ = 9	ب = 6
−	جـ = 13	د = 2

خطوات الاختبار:

1- تحديد فرض العدم والفرض البديل:

فرض العدم: بعد المحاضرة ليس هناك تغير في استجابات الطلاب

الفرض البديل: بعد المحاضرة هناك تغير في استجابات الطلاب

2- ولاختبار فرض العدم نستخدم اختبار $كا^2$

$$كا^2 = \frac{(|أ - د| - 1)^2}{أ + د} = \frac{36}{11} = 3.273$$

حيث

$$(|أ - د| - 1)^2 = (|9 - 2| - 1)^2 = 36$$

$$أ + د = 9 + 2 = 11$$

3- تحديد القيمة الجدولية

$$كا^2 (1 ، 0.05) = 3.84$$

4- اتخاذ القرار:

بما أن القيمة المحسوبة < القيمة الجدولية أذن نقبل فرض العدم أي أنه لا يوجد تغير في استجابات الطلاب بعد المحاضرة وذلك بدرجة ثقة 95%.

ملحوظة:

لا يمكن استخدام هذا الاختبار إذا كان مقدار (أ +د) أقل من 10، وإذا كان هذا المقدار أقل من 10 يتم استخدام اختبار ذو الحدين بدلا من هذا الاختبار.

(1-3) اختبار كا^2 Test χ^2

(1-3-1)اختبار الاستقلال " Independence Test "

نحتاج في حالات كثيرة إلى التعرف عما إذا كانت هناك علاقة بين مجموعتين من الصفات في المجتمع. فمثلاً قد نحتاج لمعرفة هل توجد علاقة بين المؤهل العلمي للعاملين ودرجة إتقانهم للعمل؟ هل توجد علاقة بين تفضيل أنواع معينة من برامج الكمبيوتر ونوع الجنس ؟ هل توجد علاقة بين الرأي (مؤيد ومعارض) والانتماء لمجموعة معينة ؟

للإجابة على مثل هذه الأسئلة يجب أن نختار عينة عشوائية من المجتمع محل الدراسة ثم تصنف مشاهدات هذه العينة حسب مستويات كل صفة من الصفتين ووضعها في جدول يسمى جدول التوافق. وفى هذه الحالة يكون إحصاء الاختبار:

$$\text{كا}^2 = \text{مجـ مجـ} \frac{(\text{م} - \text{ت})^2}{\text{ت}} \qquad (1-7)$$

حيث المجموع الأول للصفوف والمجموع الأخر للأعمدة.

لإيجاد التكرار المتوقع لخلية في صف معين ، وعمود معين نحسب

$$\text{ت} = \frac{\textbf{مجموع تكرارات الصف} \times \textbf{مجموع تكرارات العمود}}{\textbf{حجم العينة}} \qquad (1-8)$$

$$\text{القيمة الحرجة} = \text{كا}^2((\text{عدد الصفوف}-1)\ (\text{عدد الأعمدة}-1)،\ \alpha) \qquad (1-9)$$

مثال (1-11) :

افترض أننا نرغب في معرفة ما إذا كانت درجة إتقان العمل مستقلة عن المؤهل العلمي. سحبت عينة عشوائية من 200 موظف وتم تصنيفهم حسب المؤهل العلمي ودرجة إتقان العمل كما يلي :

جدول (1-17)

توافق التكرارات المشاهدة لدرجة إتقان

العمل مع المؤهل العلمي

درجة إتقان العمل	المؤهل العلمي			المجموع
	أدنى من ثانوية	الدراسة الثانوية	الشهادة الجامعية أو أعلى	
ممتاز	10	20	20	50
متوسط	20	20	30	70
سئ	30	20	30	80
المجموع	60	60	80	200

مستخدماً هذه المعلومات . هل توجد علاقة بين المؤهل العلمي ودرجة إتقان العمل؟ استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.01$

الحل:

1- فرض العدم : أن درجة إتقان العمل للموظف مستقل عن مؤهلة العلمي

الفرض البديل: ان درجة إتقان العمل للموظف يعتمد على مؤهله العلمي

2- وبفرض أن فرض العدم صحيح فان التكرارات المتوقعة للصف الأول يمكن إيجادها كما يلي :

$$ت_{11} = \frac{50 \times 60}{200} = 15$$

$$ت_{21} = \frac{50 \times 60}{200} = 15$$

$$ت_{31} = \frac{50 \times 60}{200} = 15$$

وهكذا يمكن إيجاد التكرارات المتوقعة للصف الثاني والثالث .

جدول(1-18)

التكرارات المتوقعة

درجة إتقان العمل	المؤهل العلمي			المجموع
	أدني من الثانوية	الدراسة الثانوية	الشهادة الجامعية أو أعلي	
ممتاز	15	15	20	50
متوسط	21	21	28	70
سئ	24	24	32	80
المجموع	60	60	80	200

وباستخدام الجدول السابقين نحسب إحصائية الاختبار $كا^2$ كما يتضح من الجدول التالي

جدول(1-19)

حساب $كا^2$

الخلايا	م ر	ت ر	(م ر-ت ر)/ت ر
(1،1)	10	15	1.667
(1،2)	20	15	1.667
(1،3)	20	20	صفر
(2،1)	20	21	0.048
(2،2)	20	21	0.048
(2،3)	30	28	0.143
(3،1)	30	24	1.5
(3،2)	20	24	0.667
(3،3)	30	32	0.125
المجموع			5.865

∴ $كا^2 = 5.865$

3- المنطقة الحرجة : $كا^2 > كا^2_{(4،0.01)} = 13.28$

4- وحيث أن $كا^2 = 5.865 < (13.28)$ فأننا لا نستطيع رفض فرض العدم وبالتالي فان درجة إتقان العمل للموظف مستقل عن مؤهلة العلمي بدرجة ثقة 99% .

جدول الاقتران (2×2) :

إذا كان لكل من الصفتين مستويان اثنان فقط وكانت التكرارات المشاهدة هي أ ، ب ، جـ، د وذلك كما يلي :

جدول (1-20)

جدول الأقتران

الصفة (1) / الصفة (2)	المستوى (1)	المستوى (2)	المجموع
المستوى (1)	(أ)	(ب)	أ + ب
(2)	(جـ)	(د)	جـ + د
المجموع	أ+جـ	ب+د	ن

وفي هذه الحالة يكون إحصاء الاختبار

$$كا^2 = \frac{ن (أ د - ب جـ)^2}{(أ+ ب) (جـ + د) (أ + جـ) (ب + د)} \qquad (10-1)$$

له تقريباً توزيع $كا^2$ بدرجة حرية واحدة . ولقد اقترح فرانك يالتس (Frank Yates) عام 1934 إذا كان أحد التكرارات المتوقعة صغيراً ، أي اقل من 5 نستخدم الصيغة التالية :

$$كا^2 = \frac{ن (| أ د - ب جـ | - (ن/2))^2}{(أ + ب) (جـ + د)(أ + جـ) (ب + د)} \qquad (11-1)$$

٢

مثال (1-12) :

سحبت عينة عشوائية مكونة من 88 طالب لمعرفة رأيهم فـي تـدعيم دراسة مادة الإحصاء باستخدام الحاسب الآلي حيث تم تـصنيفهم تبعـاً لنـوع التحاقهم بالكلية. الجدول التالي يبين نتائج الدراسة.

جدول (1-21)

جدول الأقتران بين نوع الدراسة وتدعيم دراسة مادة الإحصاء بالحاسب الآلي

الرأي	نوع الالتحاق		المجموع
	انتظام	انتساب	
مؤيد	40	33	73
معارض	3	12	15
المجموع	433	45	88

هل تدل هذه البيانات على وجود علاقة بين نوع الالتحاق ومعارضة وتأييد مبدأ دراسة الإحصاء باستخدام الحاسب الآلي ؟

استخدم مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل :

1- فرض العدم: لا توجد علاقة بين نوع الالتحاق والرأي مؤيد أو معارض.

الفرض البديل: توجد علاقة بين نوع الالتحاق والرأي مؤيد أو معارض.

2- لإيجاد إحصاء الاختبار من جدول الاقتران (2×2) يمكن تطبيق الصيغة

$$كا^2 = \frac{ن\,(أ\,د - ب\,جـ)^2}{(أ + ب)\,(جـ + د)\,(أ + جـ)\,(ب + د)}$$

$$كا^2 = \frac{88\ (480-99)^2}{73 \times 15 \times 43 \times 45} = 6.029$$

3- القيمة الحرجة $كا^2 (1 ، 0.05) = 3.841$

4- حيث ان $كا^2 = 6.029 > 3.841$ فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل بمعنى قبول انه توجد علاقة بين نوع الالتحاق والـرأي مؤيـد أو معارض لتدعيم مادة الإحصاء بالحاسب الآلي وذلك بدرجة ثقة 95%.

(1-3-2) اختبار التجانس Homogeneity Test

نفترض أن لدينا مجتمعات عددها ر وجميعها مماثلة من حيث التصنيف ولنفرض ان $ح_{لم}$ هي نسبة مفردات المجتمع م التي تقع في فئة التـصنيف ل. وعندما تكون هذه النسب مجهولة فإننا قد نرغب فـي معرفـة مـا إذا كانـت المجتمعات التي عددها ر متماثلة (متجانسة) أي أننا نرغب في اختبار فـرض العدم :

$$ح_{ل1} = ح_{ل2} = \dots ح_{لر} = ح_{ل}$$

وذلك لجميع قيم ل.

ولإجراء اختبار التجانس فإننا نختار عينة عشوائية واحدة مـن كـل مجتمـع وأحجامها هي $ن_1$، $ن_2$ ، ... ، $ن_ر$ على التوالي وهذه العينات مستقلة عن بعضها البعض.

وإحصاء الاختبار في هذه الحالة

$$كا^2 = \text{مجـ مجـ} \frac{(م_ر - ت_ر)^2}{ت_ر}$$

مثال (1-13):

لدراسة الفروق بين نتائج تدريس أحد الدورات التدريبية بثلاث طـرق مختلفة. تم تطبيق كل من هذه الطرق الثلاث على عينة من 100 موظف مـن موظفي جامعة المنصورة تم اختيارها عشوائيا وبصفة مستقلة وتستخدم التقديرات التي حصل عليها هؤلاء الموظفين للمقارنة بين هذه الطرق الثلاث. استخدم النتائج التالية لاختبار ان توزيع الموظفين حسب تقديراتهم يعتمد علـى طريقة التدريس المستخدمة وذلك بمستوى معنوية 5% .

جدول (1-21)

التقديرات التي حصل عليها 3 عينات من الموظفين

طرق التدريس / التقدير	(1)	(2)	(3)	المجموع
م	13	15	12	40
جـ جـ	28	34	35	97
جـ	36	40	38	114
ل	19	3	6	28
ض	4	8	9	21
	100	100	100	300

الحل :

1- فرض العدم: توزيع الموظفين حسب تقديراتهم لا يعتمد على طريقة التدريس.

الفرض البديل: توزيع الموظفين حسب تقديراتهم يعتمد على طريقة التدريس.

2- نحسب قيمة $كا^2$ كالاتى

جدول (1-22)

حساب كا^2

الخلايا	مر	تر	(مر-تر)/تر
(1 ،1)	13	13.333	0.008
(2 ،1)	15	13.333	0.208
(3 ،1)	12	13.334	0.133
(1 ،2)	28	32.333	0.581
(2 ،2)	34	32.333	0.086
(3 ،2)	35	32.334	0.220
(1 ،3)	36	38	0.105
(2 ،3)	40	38	0.105
(3 ،3)	38	38	صفر
(1 ،4)	19	9.333	10.013
(2 ،4)	3	9.333	4.297
(3 ، 4)	6	9.334	1.190
(1 ،5)	4	7	1.286
(2 ،5)	8	7	0.143
(3 ،5)	9	7	0.571
المجموع			18.946

كا^2 = 18.946

3- المنطقة الحرجة : كا^2> كا^2((5-1) (3-1) ، α) = 15.507

4- اتخاذ القرار :

حيث أن كا^2 = 18.946 > 15.507 فإننا نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل أي أن توزيع الطلاب حسب تقديراتهم يعتمد على طريقة التدريس المستخدمة وذلك بدرجة ثقة 95%.

مثال (1-14) :

نفترض أن باحث أراد دراسة نطاق الاهتمام بدورة معينة من دورات الحاسب الآلي بين طلبة كلية معينة ادعوا أنهم يفضلونها عن بقية الدورات.

اختار عينة من 150 طالب من سنة أولي ، 135 طالب من سنة ثانيــة ، 125 طالب من سنة ثالثة ، 100 طالب من سنة رابعة. ملي كــل طالــب اســتمارة الاستقصاء التي أشار فيها إلي نطاق اهتمامه بالدورة (اهتمام بسيط ، متوسط ، عالي وعالي جداً) والنتائج كالتالي:

جدول (1-23)

نطاق الاهتمام بالدورة بين 510 طالب مصنفين تبعاً لسنة الدراسة

السنة الدراسية	نطاق الاهتمام			
	اهتمام بسيط	متوسط	عالي وعالي جداً	الإجمالي
سنة أولي	57	50	43	150
ثانية	57	58	20	135
ثالثة	56	45	24	125
رابعة	45	22	33	100
	215	175	120	510

هل البيانات السابقة متوافقة مع الفرض القائل أن المجتمعات الأربعة تكون متجانسة من حيث نطاق الاهتمام بدورة الحاسب الآلي عند مستوي معنوية 05,.

الحل :

الفرض العدمى: المجتمعات الأربعة متجانسة من حيث نطاق الاهتمام بالدورة.

الفرض البديل: المجتمعات الأربعة غير متجانسة من حيث نطاق الاهتمام بالدورة.

2- إيجاد التكرارات المتوقعة لطلبة السنوات الدراسية الأربعة

جدول (1-24)

التكرارات المتوقعة لطلبة السنوات الدراسية الأربعة حسب نطاق الاهتمام بالدورة

السنة الدراسية	نطاق الاهتمام			
	اهتمنم بسيط	متوسط	عالي وعالي جداً	الإجمالي
سنة أولى	63.24	51.47	35.29	150.10
ثانية	56.91	46.32	31.76	134.99
ثالثة	52.70	42.89	29.41	125.00
رابعة	42.16	34.31	23.53	100.00
	215.01	174.99	119.99	509.99

3- إيجاد كا²:

جدول(1-25)

التكرارات المشاهدة والمتوقعة وكا²

المجموعات	$م_ر$	$ت_ر$	$(م_ر - ت_ر)^2 / ت_ر$
1،1	57	63.24	$(63.24-57)^2 / 63.24 = 0.616$
1،2	50	51.47	0.042
1،3	43	35.29	1.684
2،1	57	56.91	0.000
2،2	58	46.32	2.945
2،3	20	31.76	4.354
3،1	56	52.70	0.207
3،2	45	42.89	0.104
3،3	24	29.41	0.995
4،1	45	42.16	0.191
4،2	22	34.31	4.417
4،3	33	23.35	3.988
الإجمالي	510	509.99	19.544

∴ كا² = 19.544

4- كا^2 ((1-4) (1-3) ، 0.05) = كا^2 $_{(0.05 ، 6)}$ = 12.592

5- اتخاذ القرار :

حيث أن (كا^2 المحسوبة = 19.544)> (كا^2 الجدولية = 12.592)

∴ نرفض فرض العدم ونقبل الفرض البديل القائل بأن المجتمعات الأربعة غير متجانسة من حيث نطاق الاهتمام بدورة الحاسب الآلي وذلك عند مستوي معنوية 5%.

- ملحوظة: أن الفرق بين اختبار التجانس والاستقلال يكون في إجراء التجربة، وإحصاء الاختبار يكون واحد في الحالتين.

- **في الاستقلال:** يتم اختيار عينة واحدة ويتم تصنيفها تبعاً لمستويات كل صفة من الصفتين المراد معرفة إذا كان هناك علاقة بينهما أم لا. اي اختبار ما إذا كانت صفتان أو اكثر من الصفات المستخدمة في عملية التصنيف مستقلة.

- **في التجانس:** يتم اختيار عينة عشوائية واحدة من كل مجتمع من المجتمعات المتماثلة من حيث التصنيف تبعاً لصفة معينة.

(1-4) المقارنة بين عدد من المجموعات المترابطة:

(1-4-1) اختبار فريدمان "*Friedman Test*"

هو من الاختبارات الغير معلميه ويستخدم لمقارنة تأثير ثلاث معالجات أو أكثر وذلك في حالة عدم توفر الشروط اللازمة لاستخدام إجراءات تحليل التباين ،حيث تخضع عينة واحدة لعدة اختبارات أو تجارب أو مواقف في فترات زمنية متلاحقة أو في نفس الفترة أحيانا، ثم يتم قياس تلك العينة في كل تجربة أو موقف من هذه المواقف، وتتم المقارنة بين الدرجات التي يتم الحصول عليها

لمعرفة مدي الفروق الموجودة بين هذه المواقف،.ومن أمثلة هـذا النـوع مـن التصميمات التي يستخدم فيها اختبار فريدمان ما يلي:

(أ) استطلاع رأي عينة من مشاهدي التليفزيون بشأن تفضيلهم لثلاثة أو أربعة برامج ثقافية ثم المقارنة بين استجابات العينة بشأن كل من هذه الاستجابات.

(ب) استطلاع رأي عينة من طلبة الثانوية العامة بشأن تفضيلهم لثلاثة أو أربعة مهن معينة ثم المقارنة بين استجابات العينة بشأن كل من هذه الاستجابات.

ويستخدم اختبار فريدمان إذا كان مستوي قياس المتغير التابع ترتيبي علي الأقل.

الفروض :

وهذه تتوقف علي الافتراضات حول البيانات، فقد تكون :

- تساوي المتوسطات الحسابية في حالة البيانات الكمية وتماثل التوزيعات.
- تساوي الوسيط في كل المجتمعات: في حالـة البيانـات الرتبيـة وتماثـل التوزيعات.
- تساوي متوسط الرتب في كل المجتمعات: في حالة عدم وجود افتراضـات حول التوزيعات.

ويوجد فرضان يمكن اختبارهما الأول عن تأثير المعالجـات والثـاني لتـأثير القطاعات.

فروض المعالجات:

فرض العدم: المعالجات كلها لها نفس التأثير.

الفرض البديل: علي الأقل واحدة من المعالجات تقترب لتحقق قيم مشاهدة أكبر من علي الأقل واحدة من المعالجات الأخرى.

وبالمثل تكون فروض القطاعات.

. إحصاء الاختبار

يتم تنظيم البيانات في ن من القطاعات ، م من المعالجات ، ويتم إعطاء القيم في كل قطاع رتب ، ثم تجمع الرتب في كل معالجة فإذا كان فرض العدم صحيحاً يتساوى تقريباً مجموع الرتب في المعالجات $ر_1$ ، ... ، $ر_م$.

الإحصاء المستخدم في الاختبار هو

$$ف = \frac{12}{ن\ م\ (م+1)} \sum_{ر=1}^{م} ر_ر^2 - 3\ (ن\ (م+1)) \qquad (1-12)$$

وهي تتبع تقريباً $كا^2$ بدرجات حرية (م−1)

مثال (1-15)

قام ثلاثة مدربين بتقديم موضوع معين إلي عينة عشوائية حجمها 15 متدرباً بعد أن تم تقسيم ذلك الموضوع إلي ثلاث وحدات تدريبية غير متداخلة. هذا وقد تم تقديم الوحدة الأولي بمحاضرات فقط ، بينما كانت وسيلة التدريب للوحدة الثانية هي الحاسب الآلي، واستخدم المدرب الثالث في تقديم وحدته بعض المحاضرات مع استخدام الحاسب الآلي.

كانت هناك تقييمات تتم عند نهاية كل وحدة، وكانت الدرجة القصوى هي 10 درجات فهل تختلف الطرق الثلاث من حيث مستوي الفاعلية، وذلك عند مستوي معنوية 0.05 .

جدول(1-26)

تقييمات 15 متدرباً لثلاث وسائل تعليمية

الوسيلة / رقم المتدرب	محاضرات	حاسب آلي	محاضرات + حاسب آلي
1	3	5	1
2	7	6	3
3	5	4	7
4	2	6	5
5	7	2	6
6	5	3	4
7	6	10	7
8	8	4	6
9	4	6	8
10	3	صفر	2
11	1	2	5
12	6	8	9
13	4	7	5
14	8	5	4
15	9	8	10

الحل

فرض العدم : لا يوجد فرق جوهري بين متوسطات الطرق الثلاث.

الفرض البديل: هناك فرق جوهري بين متوسطات الطرق فيما بينها.

ترتيب تقييمات كل متدرب ترتيباً تصاعدياً كما هو موضح بالجدول التالي

جدول(1-27)

ترتيب تقييمات كل متدرب للوسائل التعليمية الثلاث

الوسيلة / رقم المتدرب	محاضرات	حاسب آلي	محاضرات + حاسب آلي
1	2	3	1
2	3	2	1
3	2	1	3
4	1	3	2
5	3	1	2
6	3	1	2
7	1	3	2
8	3	1	2
9	1	2	3
10	3	1	2
11	1	2	3
12	1	2	3
13	1	3	2
14	3	2	1
15	2	1	3
مجموع الرتب	$ر_1 = 30$	$ر_2 = 28$	$ر_3 = 32$

إحصاء الاختبار

$$ف = \frac{12}{4 \times 3 \times 15}\left((30)^2 + (28)^2 + (32)^2\right) - 3 \times 15 \times 4 = 0.53.$$

$$كا^2_{(م-1 ، 1-\alpha)} = كا^2_{(2 ، 0.95)} = 5.99$$

وبما أن إحصائية الاختبار أقل من القيمة الحرجة، فليس هناك ما يمنـــع من قبول أو رفض فرض العدم بمستوي معنوية 5%، بمعني أنه لا يوجد دليل كاف علي وجود فرق جوهري بين الطرق الثلاث.

مثال(1-16):

نفرض أن أحد الباحثين قام بإجراء دراسة لمعرفة ما إذا كان هناك فروق ذات دلالة إحصائية بين طلبة المرحلة الثانوية من حيث تفضيلهم لأربعة برامج تعليمية تقدم في القنوات التعليمية بالتليفزيون المصري . فاختار عينة من 10 طلبة وطلب من كل منهم بيان رأيه بكل برنامج من هذه البرامج (أ،ب،جـ،د) وذلك بإعطاء الدرجة التي يراها الطالب مناسبة لكل برنامج. وتتراوح الدرجة بين (7:1) 1 غير جيد، 7 ممتاز وبقية الدرجات ما بين هاتين الدرجتين. وقد كانت النتائج كما في الجدول التالي

جدول(1-27)

درجات تقييم عينة من 10 طلبة للبرامج التعليمية الاربعة

طلبة المرحلة الثانوية	البرامج تعليمية			
	أ	ب	جـ	د
1	7	3	1	4
2	5	2	2	6
3	4	3	2	6
4	5	5	1	4
5	7	1	6	3
6	4	4	4	5
7	2	1	6	5
8	5	5	5	5
9	3	2	5	4
10	6	7	4	3

الحل:

1- فرض العدم: لا يوجد فرق جوهري بين متوسطات درجات الطلبة للبرامج الأربعة.

الفرض البديل: هناك فرق جوهري بين متوسطات درجات الطلبـــة للبـــرامج الأربعة.

2- احصائية الاختبار: يتم أولا ترتيب تقييمات كل متدرب ترتيباً تصاعدياً كما هو موضح بالجدول التالي

جدول(1-28)

ترتيب تقييمات كل طالب للبرامج التعليمية الاربعة

طلبة المرحلة الثانوية	البرامج تعليمية			
	أ	ب	جـ	د
1	1	3	4	1
2	2	3.5	3.5	1
3	2	3	4	1
4	1.5	1.5	4	3
5	1	4	2	3
6	3	3	3	1
7	3	4	1	2
8	2.5	2.5	2.5	2.5
9	3	4	1	2
10	2	1	3	4
ر	**21**	**29.5**	**28**	**21.5**

$$ف = \frac{12}{5 \times 4 \times 10} \left((21)^2 + (29.5)^2 + (28)^2 + (21.5)^2 \right) - 3 \times 10 \times 5$$

$$= 0.06(2557.5) - 150 = 3.45$$

3-القيمة الحرجة: $كا^2_{(م-1 ، \alpha)} = كا^2_{(3 ، 0.05)} = 7.815$

4- اتخاذ القرار: وبما أن إحصائية الاختبار أقل من القيمة الحرجة ، فلا يمكن رفض فرض العدم بعدم وجود فروق معنوية بين استجابات الطلبة بشأن البرامج التعليمية الأربعة ،ويمكن أن نستنتج من ذلك أن أراء الطلبة متفقة علي عدم تفضيل برنامج علي آخر فهي في نظرهم متشابهة من حيث الجودة وذلك بمستوي معنوية 5%.

(1-5) المقارنة بين عدد من المجموعات المستقلة:

(1-5-1) اختبار كروسكال –واليز:

عند إجراء اختبارات الفروض المتعلقة بالفروق بين متوسطات ثلاثة مجتمعات أو أكثر (تحليل التباين) افترضنا أن المجتمعات الأصلية توزيعها طبيعي وأن تبايناتها مجهولة ومتساوية فإذا تحققت هذه الافتراضات فإنه يمكننا استخدام اختبار ف.

أما إذا لم تتحقق هذه الافتراضات وأصبح من غير الممكن استخدام اختبار ف لدراسة هذا النوع من المشاكل. فيمكن استخدام طريقة لا معلمية ملائمة تسمي اختبار مجموع الرتب (Rank Sum Test) بدلاً من توزيع ف.

ويسمي اختبار مجموع الرتب الذي يستخدم لمقارنة المجموعات واختبار الفروق بينها باسم اختبار كروسكال-واليز وهو اختبار لا معلمي.

الافتراضات:-

1- مستوي قياس المتغير التابع ترتيبي علي الأقل.

2- العينات كلها عشوائية ومستقلة.

إحصاء الاختبار :

يتم ترتيب كل المفردات ترتيباً تصاعدياً ، وفي حالة وجود قيم مكررة تعطي كلها رتب تعادل الوسط الحسابي لرتب هذه القيم ، نجمع الرتب في كل مجموعة ونرمز لمجموع الرتب لعدد م من المجموعات بالرمز $ر_1$ ، $ر_2$ ،...، $ر_م$.

يرمز لإحصاء الاختبار بالرمز ك ويكون كالآتي

$$ك = \left[\frac{12}{ن\,(ن+1)} \left(مجـ \frac{ر_ل^2}{ن_ل} \right) \right] - 3\,(ن+1) \qquad (13-1)$$

حيث

$ن_ل$ = عدد المشاهدات داخل المجموعة ل

$ر_ل$ = مجموع رتب العينة ل

ن = إجمالي حجم العينة

الإحصاء ك يتبع توزيع $كا^2$ بدرجات حرية (م−1) حيث م عدد المجموعات.

وكما هي العادة يختبر فرض العدم القائل بتطابق توزيعات هذه المجتمعات بمقارنة قيمة إحصائية الاختبار ك مع القيمة الحرجة المستخرجة من جداول $كا^2$ عند مستوي المعنوية المحدد α، ودرجات الحرية(م−1). ويرفض فرض العدم إذا كانت قيمة ك أكبر من أو تساوي قيمة $كا^2$ الحرجة $= كا^2_{(م-1، α)}$.

وفي حالة رفض فرض العدم نوجد أ ف م لكل مجموعتين من المجموعات الثلاث

$$أ ف م = ت_{(11 ، 1-α/2)} \sqrt{هـ^2 \left(\frac{ن-1-ك}{ن-م} \right) \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2} \right)} \qquad (14-1)$$

حيث

$$\text{هـ}^2 = \frac{1}{\text{ن} - 1} \left[\text{مجـ ر}^2 - \text{ن} \left(\text{ن} + 1 \right)^2 / 4 \right] \qquad (15-1)$$

وذلك في حالة وجود رتب مكررة ويمكن استخدام المعادلة

$$\text{هـ}^2 = \frac{\text{ن} \left(\text{ن} + 1 \right)}{12} \qquad (16-1)$$

في حالة عدم وجود رتب مكررة.

مثال(1-17):

استخدمت ثلاث طرق تدريس مختلفة لمادة الإحصاء وهي محاضرات نظرية، تطبيق إحصائي باستخدام الكمبيوتر ، حاسب آلي ومحاضرات نظرية لثلاث عينات متجانسة من الطلاب وكانت درجاتهم في الامتحان النهائي كالآتي:

جدول(1-29)

درجات ثلاث عينات متجانسة من الطلاب لثلاث طرق تدريس مختلفة

الرقم \ الطريقة	محاضرات نظرية	تطبيق إحصائي باستخدام الكمبيوتر	حاسب آلي ومحاضرات نظرية
1	95	84	92
2	73	80	83
3	88	69	89
4	86	93	81
5	79	77	74
6	82	94	71
7		90	85
8		72	91
9			87
10			78
11			70

فهل هناك فرق جوهري بين الطرق الثلاث بمستوي معنوية 0.05.

الحل:

1- فرض العدم: التوزيعات الاحتمالية لدرجات الطلبة لطرق التدريس الثلاث متماثلة، أو ليس هناك فرق جوهري بين الطرق الثلاث في التدريس.

الفرض البديل: علي الأقل طريقتين من طرق التدريس الثلاث التوزيعات الاحتمالية لدرجات الطلبة لهما تختلف في المتوسط ، أو هناك فرق جوهري بين الطرق الثلاث في التدريس.

2- احصائية الاختبار: يتم اولا ترتيب كل المفردات وعددها

ن = 6 + 8 + 11 = 25 ترتيباً تصاعدياً و يوضح الجدول التالي رتب درجات الطلبة في مادة الإحصاء.

جدول(1-30)

رتب درجات الطلبة لثلاث طرق تدريس مختلفة لمادة الاحصاء

الطريقة	محاضرات نظرية	تطبيق باستخدام الحاسب الآلي	محاضرات وحاسب آلي
1	25	14	22
2	5	10	13
3	18	1	19
4	16	23	11
5	9	7	6
6	12	24	3
7		20	15
8		4	21
9			17
10			8
11			2
المجموع	$ر_1 = 85$	$ر_2 = 103$	$ر_3 = 137$

$$ك = \left[\frac{12}{ن\,(ن+1)}\left(مجـ\ \frac{ر_{ر}^{2}}{ن_{ـ}}\right)\right] - 3\,(ن+1)$$

$$= \frac{12}{25\,(26)}\left(\frac{(85)^2}{6} - \frac{(103)^2}{8} + \frac{(137)^2}{11}\right) - 3(26) = 0.213$$

المنطقة الحرجة:

$كا^2 > كا^2_{(2 ، 0.05)} = 5.991$

القرار: وبما أن ك المحسوبة $(0.213) < كا^2_{(م-1 ، \alpha)} = (5.991)$.

أذن لابد من قبول فرضية العدم بأنه لا يوجد فرق جوهري بين الطرق الثلاث بمستوي معنوية 0.05.

مثال(1- 18):

نفترض في دراسة لمعرفة الاستفادة من الحاسب الآلي لطلبة سنة ثالثة بالكلية تم سحب ثلاث عينات من ثلاث مجتمعات مختلفة تمثل طلبة انتظام علمي وانتظام أدبي وانتساب. وتم توزيع قائمة علي كل طالب تشمل عدداً من الأسئلة والفقرات وفيما يلي جدول يبين مجموع الإجابات لكل طالب. بين ما إذا كان هناك فرق بين المجموعات الثلاثة وذلك بمستوي معنوية 5%.

جدول(1-31)

درجات ثلاث عينات من الطلاب من ثلاث مجتمعات مختلفة

انتظام علمي (أ)	انتظام أدبي (ب)	انتساب (حـ)
43	84	14
11	80	40
26	39	52
30	72	64
35		37

الحل

1- فرض العدم:التوزيعات الاحتمالية لدرجات الطلبة للمجموعات الثلاث متماثلة ، أو ليس هناك فرق جوهري بين المجموعات الثلاث .

الفرض البديل:علي الأقل مجموعتين من المجموعات الثلاث التوزيعات الاحتمالية لدرجات الطلبة لهما تختلف في متوسط الدرجات، أو هناك فرق جوهري بين المجموعات الثلاث.

2- يوضح الجدول التالي رتب مجموع الإجابات لكل طالب من الطلبة الأربع عشر (ن= 5 + 4 + 5 = 14) ومجموع رتب كل مجموعة من مجموعات الطلبة

جدول(1-32)

رتب درجات ثلاث عينات من الطلاب لثلاث مجتمعات مختلفة

انتظام علمي (أ)	انتظام أدبي (ب)	انتساب (حـ)
9	14	2
1	13	8
3	7	10
4	12	11
5		6
$ر_1$ = 22	$ر_2$ = 46	$ر_3$ = 37

$$ك = \frac{12}{14\ (15)} \left(\frac{(22)^2}{5} + \frac{(46)^2}{4} + \frac{(37)^2}{5} \right) - 3\ (15) = 6.4$$

3-المنطقة الحرجة:

$كا^2 > كا^2_{(2 ، 0.05)} = 5.99$

4-القرار:

بما أن ك المحسوبة (6.4) اكبر من $كا^2_{(2 ، 0.05)}$ = (5.99). نرفض فرض العدم ونقبل وجود فرق جوهري بين المجموعات الثلاث بمستوي معنوية 5%.

المقارنات المتعددة : لإجراء المقارنات المتعددة بين المجموعات الثلاث نوجد:

$$1-\ هـ^2 = \frac{1}{ن - 1} \left[مجـ ر^2 - ن\ (ن+1)^2 / 4 \right]$$

$$هـ^2 = \frac{1}{13} [1015 - 14 (15)^2 / 4] = 17.5$$

ويمكن استخدام المعادلة

$$هـ^2 = \frac{ن (ن+1)}{12} = 14(15) /12 = 17.5$$

وذلك لعدم وجود رتب مكررة.

2- نوجد أ ف م لكل مجموعتين من المجموعات الثلاث

$$أ ف م = ت_{(11 ، 1- \alpha /2)} \sqrt{هـ^2 (\frac{ن-1-ك}{ن-م}) (\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2})}$$

حيث

$ت_{(11، 0.025)} = 2.201$ ، ن-1 = 14-1=13 ، ك=6.4

لمقارنة (أ) ، (حـ)

$$أ ف م = 2.201 \sqrt{17.5 (\frac{13-6.4}{11}) (\frac{1}{5} + \frac{1}{5})} = 4.5$$

لمقارنة (أ،ب) أو(ب،حـ)

$$أ ف م = 2.201 \sqrt{17.5 (\frac{13-6.4}{11}) (\frac{1}{5} + \frac{1}{4})} = 4.78$$

3- نكون جدول يوضح الفروق المطلقة بين متوسطات رتب كل مجموعتين من المجموعات.

جدول(1-33)

الفروق المطلقة بين متوسطات رتب كل مجموعتين من المجموعات

متوسط الرتب	انتظام علمي (أ) 4.40	انتظام أدبي (ب) 11.5	انتساب (هـ) 7.4
(أ) انتظام علمي 4.40	-	7.1	3
(ب) انتظام أدبي 11.5	-	-	4.1

إذن يوجد فرق معنوي في مدي الاستفادة من الحاسب الآلي بين طلبة علمي وأدبي وذلك عند مستوي معنوية 5% حيث :

$|\bar{R}_1 - \bar{R}_2| = 7.1 >$ أ ف م $= 4.78$

مثال(1-19):

في دراسة لمعرفة الطريقة المثلي لنمو محصول معين. قام أحد الباحثين بتجربة أربع طرق مختلفة لنمو المحصول علي عدد كبير من القطع المختلفة من الأرض ثم قياس المحصول لكل أربعة آلاف متر مربع من الأرض وكانت النتائج كما في الجدول التالي

جدول(1-34)

قياس المحصول لكل أربعة آلاف متر مربع من الأرض لكل طريقة من الطرق الاربعة

الطرق	كمية المحصول									
(1)	83	91	94	89	89	96	91	92	90	
(2)	91	90	81	83	84	83	88	91	89	84
(3)	101	100	91	93	96	95	94			
(4)	78	82	81	77	79	81	80	81		

والمطلوب اختبار عدم وجود فرق معنوي في المحصول نتيجة الطريقة المستخدمة باستخدام اختبار كروسكال واليز.

1- فرض العدم: المجتمعات الأربعة متجانسة من حيث نطاق اهتمامهم بالدورة.

الحل:-

1- فرض العدم : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

الفرض البديل : طريقة أو أكثر لنمو المحصول تحقق ارتفاع في المحصول عن الآخرين.

2- نرتب المشاهدات ترتيباً تصاعدياً من الأصغر (77) من الرتبة (1) للأكبر (101) من الرتبة (34) ، ونأخذ متوسط الرتب للقيم المكررة. ونجد أن

ر$_1$=196.5 ر$_2$=153.0 ر$_3$= 207 ر$_4$=38.5

ن$_1$= 9 ن$_2$ = 10 ن$_3$= 7 ن$_4$ = 8

ن = 9 + 10 + 7 + 8 = 34

جدول(1-35)

رتب قياس المحصول لكل أربعة آلاف متر مربع من الأرض لكل طريقة من الطرق الاربعة المختلفة لنمو المحصول

(1)		(2)		(3)		(4)	
المشاهدة	الرتبة	المشاهدة	الرتبة	المشاهدة	الرتبة	المشاهدة	الرتبة
83	11	91	23	101	34	78	2
91	23	90	19.5	100	33	82	9
94	28.5	81	6.5	91	23	81	6.5
89	17	83	11	93	27	77	1
89	17	84	13.5	96	31.5	79	3
96	31.5	83	11	95	30	81	6.5
91	23	88	15	94	28.5	80	4
92	26	91	23			81	6.5
90	19.5	89	17				
		84	13.5				
	ر$_1$=196.5 ن$_1$ = 9		ر$_2$=153 ن$_2$ = 10		ر$_3$= 207 ن$_3$= 7		ر$_4$=38.5 ن$_4$ = 8

3- إحصاءة الإختبار:

$$ك = \left(\frac{12}{34(35)} \left(\frac{(196.5)^2}{9} + \frac{(153)^2}{10} + \frac{(207)^2}{7} + \frac{(38.5)^2}{8} \right) \right) - 3(35)$$

$$=25.46$$

4-المنطقة الحرجة هي : ك > كا^2 (3، 0.05) = 7.815

5- القرار : نرفض فرض العدم حيث أن :

ك = 25.46 > 7.815 أي أن تـأثير الطـرق الأربعـة علـي نمـو المحصول ليس كله متساوي.

المقارنات المتعددة : نوجد

$$أ ف م = ت_{(0.025 ، 30)} \sqrt{هـ^2 \left(\frac{ن - 1 - ك}{ن - م} \right) \left(\frac{1}{ن_1} + \frac{1}{ن_2} \right)}$$

حيث :

$$هـ^2 = \frac{ن(ن+1)}{12} = \frac{34(35)}{12} = 99.167$$

وذلك لوجود رتب مكررة بدرجة قليلة.

$$بما ان \frac{هـ^2 (ن - 1 - ك)}{ن - م} = \frac{(99.167)(33-25.464)}{34 - 4} = 24.911$$

$$\therefore أ ف م = 2.041 \sqrt{24.911 \left(\frac{1}{ن_أ} + \frac{1}{ن_ب} \right)}$$

والحسابات الباقية تكون كالاتي :

المجتمعات	$\lvert \bar{ر}_{أ} - \bar{ر}_{ب} \rvert$	أ ف م
1 ، 2	6.533	4.681
1 ، 3	7.738	5.134
1 ، 4	17.021	4.950
2 ، 3	14.271	5.020
2 ، 4	10.488	4.832
3 ، 4	24.759	5.272

في كل حالة من الحالات السابقة العمود الثاني يزيد عن العمود الثالث ، لذا نذكر أن إجراء المقارنات المتعددة يعرض أن كل زوج من المجتمعات يكون مختلف.

تمارين علي الباب الأول

تمرين (1):

وجدت شركة القاضي للتجارة الدولية من خبراتها الماضية أن 30% من أجهزة الحاسب المباعة من النوع أ، 40% من النوع ب، 30% من النوع جـ لتحديد حجم المخزون الواجب الاحتفاظ به من كل نوع. اخذ المدير عينة عشوائية من 100 من المبيعات الحديثة لأجهزة الحاسب فوجد أن منها 20 من النوع الأول، 40 من النوع الثاني، 40 من النوع الثالث. باستخدام مستوى معنوية 5% اختبر الفرض القائل بأن نمط المبيعات الماضي لازال سائداً.

الحل :

كا^2 = 5.83   كا^2(2 ، 0.05) = 5.99

وحيث كا^2= 5.83 اقل من 5.99 لا نستطيع أن نرفض فرض العدم وبالتالي فان نمط المبيعات في الماضي ما زال سائداً للآن.

تمرين (2) :

جمع مدير مبيعات إحدى شركات الحاسب الآلي البيانات الموضحة في الجدول التالي عن عدد أجهزة الحاسب الآلي من نوعين مختلفين التي يشتريها عملاء أعمارهم تحت سن 20 سنة والتي يشتريها عملاء أعمارهم 20 سنة فأكثر.

العمر	نوع الجهاز		الإجمالي
	أ	ب	
تحت 20	30	40	70
20 فأكثر	20	80	100
الإجمالي	50	120	170

اختبر ما إذا كان نوع الجهاز مستقلاً عن سن المشترى عند مستوى معنوية 5%.

الحل :

كا^2 = 9.44   كا^2(1، 0.05) = 3.84

وحيث أن :

كا^2 > 3.84 فإننا نرفض الفرض القائل بان السن ليس عاملاً في تحديد نوع الجهاز المشترى وذلك عند مستوى معنوية 5%.

تمرين (3):

اعتبر أن أوزان الطلبة المعطاة في التوزيع التكراري التالي لعينة من 100 طالب من طلبة إحدى الجامعات تتبع التوزيع الطبيعي

الأوزان	62-60	65-63	68-66	71-69	74-72
عدد الطلبة	5	18	42	27	8

الحل :

س̄ = 67.45 كيلوجرام   ع = 2.92 كيلو جرام

كا^2 = 0.959   كا^2 (2 ، 0.05) = 0.103

ونستنتج أن توفيق البيانات ليس على درجة كبيرة من الجودة. بمعنى أن البيانات لا تتبع التوزيع الطبيعي.

الأوزان	المساحة لكل فئة	ت	م	(ت-م)^2/ت
62-60	0.0413	4.13	5	
65-63	0.2068	20.68	18	
68-66	0.3892	38.92	42	
71-69	0.2771	27.71	27	
74-72	0.0743	7.43	8	
				0.959

أكمل الحل.

تمرين (4) :

البيانات التالية تمثل عدد المكالمات التليفونية التي تلقتها الكلية فيما بين الساعة 10.00 والساعة 10.01 صباحاً خلال 150 يوماً .

عدد المكالمات	0	1	2	3	4	5	6 فأكثر
التكرار بالأيام	6	10	45	50	20	14	5

اختبر فرض العدم القائل بان التكرارات المشاهدة تتبع توزيـــع بواســـون عنـــد α=0.05

تمرين (5) :

صممت دراسة لتحديد مدي قابلية المرضي لدواء جديد يخفف الآلام من مرض معين ، 100 طبيب كل منهم اختار عينة من 25 مريض للاشتراك في الدراسة. تم سؤال كل مريض بعد استخدام الدواء لفترة معينة ما إذا كان هذا الدواء أجدر بالتفضيل. اختبر نتائج الدراسة المعروضة في الجدول التالي هل هذه النتائج تتبع توزيع ذو الحدين أم لا.

عدد المرضي من 25 الذين يفضلون الدواء الجديد	عدد الأطباء الذين قدموا تقريرهم بهذا الدواء	إجمالي عدد المرضي الذين يفضلون الدواء الجديد
صفر	5	صفر
1	6	6
2	8	16
3	10	30
4	10	40
5	15	75
6	17	102
7	10	70
8	10	80
9	9	81
10 فأكثر	صفر	صفر
الإجمالي	100	500

الحل :

إجمالي عدد المرضي المشتركين في الدراسة = 2500

إجمالي عدد المرضي الذين يفضلون الدواء الجديد = 500

نسبة الذين يفضلون الدواء = $\hat{ل}$ = $\frac{500}{2500}$ = 0.2

يمكن الحصول علي التكرار النسبي المتوقع باستخدام دالة توزيع ذو الحدين التالية:

$$ح(س) = \binom{25}{س} (0.2)^{س} (0.8)^{25-س} \quad س = صفر، 1، ...، 25$$

لإيجاد احتمال عدم وجود مريض يفضل الدواء الجديد من 25 مريضاً نوجد ح (س=0) كالتالي :

$$ح(س=0) = \binom{25}{صفر} (0.2)^{صفر} (0.8)^{25-صفر} = 0.0038$$

التكرار المتوقع لعدد المرضي الذين لا يفضلون الدواء الجديد =100 (0.0038)=0.38

بالمثل نحصل علي بقية التكرارات المتوقعة المناظرة للتكرارات المشاهدة وتكون النتائج كما في الجدول التالي :

عدد المرضي	$م_ر$	الاحتمال	$ت_ر$
صفر	5	0.0038	0.38
1	6	0.0236	2.36
2	8	0.0708	7.08
3	10	0.1358	13.58
4	10	0.1867	18.67
5	15	0.1960	19.60
6	17	0.1633	16.33
7	10	0.1109	11.09
8	10	0.0623	6.23
9	9	0.0295	2.95
10 فأكثر	صفر	0.0173	1.73
الإجمالي	100	1.0000	100

أكمل الجدول.

تمرين (6):

الجدول التالي يعرض 200 من طلبة سنة ثالثة مصنفين تبعاً للمستوي الاجتماعي وحالة الصداع.

حالة الصداع	المستوي الاجتماعي			الإجمالي
	أ	ب	حـ	
لا يوجد صداع (في السنة السابق)	6	30	22	58
صداع بسيط	11	35	17	63
صداع متوسط (ولكنه غير نصفي)	4	19	14	37
صداع نصفي	5	25	12	42
الإجمالي	26	109	65	200

هل البيانات السابقة تمدنا بدليل معنوي أن هناك علاقة معنوية بين المستوي الاجتماعي وحالة الصداع. اختبر ذلك مستخدماً مستوي معنوية 5%.

الحل :

كا^2 = 3.4505 **(أكمل)**

تمرين (7) :

التوزيع التكراري التالي يوضح درجات امتحان القبول لوظيفة معينة لعدد 175 متقدم للوظيفة.

الدرجات	عدد المتقدمين
14-10	3
19-15	8
24-20	13
29-25	17
34-30	19
39-35	25
44-40	28
49-45	20
54-50	18
59-55	12
64-60	8
69-65	4
الإجمالي	175

اختبر هل الدرجات تتبع التوزيع الطبيعي مستخدماً مستوي معنوية 5%.

تمرين (8):

في دراسة لمقارنة الزمن اللازم لتعبئة منتج معين باستخدام ثلاث أنواع من آلات التعبئة كانت النتائج كما في الجدول التالي:

الآلة (1)	الآلة (2)	الآلة (3)
25.4	23.4	20
26.31	21.8	22.2
24.10	23.5	19.75
23.74	22.75	20.6
25.10	21.6	20.4

المطلوب استخدام اختبار كروسكال-واليز لاختبار فرض العدم أن الوسيط الزمني للماكينات الثلاثة متساوي عند مستوي معنوية 05,..

الحل

1- فرض العدم : $M_1 = M_2 = M_3$

الفرض البديل:علي الأقل متوسط من المتوسطات يختلف معنويا عن بقية المتوسطات

حيث أن M = الوسيط

2-الجدول التالي يوضح رتب الزمن اللازم لتعبئة منتج معين

الآلة (1)	الآلة (2)	الآلة (3)
14	9	2
15	6	7
12	10	1
11	8	4
13	5	3
ر$_1$ = 65	ر$_2$ = 38	ر$_3$ = 17

$$ك = \frac{12}{15\,(16)} \left[\frac{(65)^2}{5} + \frac{(38)^2}{5} + \frac{(17)^2}{5} \right] - 3\,(16) = 11.58$$

3-المنطقة الحرجة:

كا^2 > كا$^2_{(2,\ 0.05)}$ = 5.99

4-القرار:

∵ ك المحسوبة (11.58) > من كا$^2_{(2,\ 0.05)}$ = (5.99).

∴ نرفض فرض العدم ونقبل بوجود فرق جوهري بين الآلات الثلاث بمستوي معنوية 5%.

تمرين (9):

نفرض أن باحث اختار عينة عشوائية من (10) من خريجي الدراسة الثانوية وطلب من كل منهم إبداء رأيه بخمسة تخصصات دراسية في الجامعة وأن يقوم بإعطاء رتبة رقم (1) للتخصص الذي يرغب فيه أكثر من غيره ، ورتبه رقم (2) للتخصص الذي يليه ، وهكذا لباقي التخصصات الأخرى. اختبر فرض العدم القائل بأنه لا يوجد فرق معنوي بين رغبات الطلبة بالتخصصات الدراسية الخمسة.

التخصص / الطلبة	تاريخ	جغرافيا	اقتصاد	علم نفس	فلسفة
1	3	2	1	4	5
2	2	1	3	5	4
3	1	2	3	4	5
4	2	1	3	5	4
5	4	3	2	1	5
6	4	5	1	3	2
7	1	2	3	5	4
8	4	3	5	2	1
9	5	4	3	1	2
10	3	2	1	4	5

الحل:

باستخدام اختبار فريدمان

ر$_1$ = 29 ، ر$_2$ = 25 ، ر$_3$ = 25 ، ر$_4$ = 34 ، ر$_5$ = 37

$$\text{ف} = \frac{(12)\ (4616)}{10\ (5)\ (6)} - 3 \times 10 \times 6 = 4.64$$

كا^2 (4 ، 0.05) = 9.49

وحيث أن القيمة المحسوبة ((4.64) أقل من القيمة الحرجة (9.49) فهذا يعني عدم إمكانية رفض فرض العدم التي تقول بعدم وجود فرق معنوي بين اختبارات الطلبة للتخصصات الدراسية. ونستنتج من ذلك أن الطلبة لا يفضلون تخصصاً دراسياً معيناً علي غيره من التخصصات الأخرى المذكورة.

تمرين (10):

نفترض أن باحث بقسم إدارة المستشفيات يرغب في مقارنة متوسط عدد الآسرة الخالية في 3 مستشفيات بمدينة معينة. فاختار 10 أيام مختلفة من سجلات كل مستشفي وسجل عدد الآسرة الخالية في كل يوم كما في الجدول التالي

المستشفي الأولى		المستشفي الثانية		المستشفي الثالثة	
الآسرة	الرتب	الآسرة	الرتب	الآسرة	الرتب
6	5	34	25	13	9.5
38	27	28	19	35	26
3	2	42	30	19	15
17	13	13	9.5	4	3
11	8	40	29	29	20
30	21	31	22	0	1
15	11	9	7	7	6
16	12	32	23	33	24
25	17	39	28	18	14
5	4	27	18	24	16
$ر_1$	120	$ر_2$	210.5	$ر_3$	134.5

وضح باستخدام اختبار كروسكال واليز أن هناك علي الأقل مستشفي من المستشفيات الثلاث متوسط عدد الآسرة الخالية بها اكبر من بقية المستشفيات وذلك عند مستوي معنوية 0.05.

الحل:

فرض العدم: التوزيعات الاحتمالية لعدد الآسرة الخالية في المستشفيات الثلاث متماثلة

الفرض البديل: على الأقل مستشفى من المستشفيات الثلاث التوزيع الاحتمالي لعدد الأسرة الخالية بها يختلف في المتوسط.

$$ك = \frac{12}{30\ (31)} \left[\frac{(120)^2}{10} + \frac{(210.5)^2}{10} + \frac{(134.5)^2}{10} \right] - 3(31) = 6.097$$

القرار:

وبما أن ك المحسوبة (6.097) > $كا^2_{(م-1 ، \alpha)}$ =(5.991). أذن لابد من رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل بان علي الأقل مستشفي من المستشفيات الثلاث التوزيع الاحتمالي لعدد الأسرة الخالية بها يختلف في المتوسط عن بقية المستشفيات وذلك بمستوي معنوية 5%.

تمرين (11):

في إحدى المدارس، تستخدم ثلاث طرق للتدريس، وكل فصل يحوي 8 طلاب، وفي نهاية العام يتم اختيارهم وترتيب كل النتائج ترتيباً تصاعدياً كما هو موضح بالجدول التالي. والمطلوب اختبار الفرض القائل بأن طرق التدريس الثلاثة متكافئة مستخدما اختبار كروسكال واليز وذلك عند مستوي معنوية 0.05.

(أ)	(ب)	(جـ)
16	**20**	**19**
21	**3**	**1**
9	**12**	**10**
24	**11**	**4**
15	**5**	**2**
22	**18**	**14**
13	**7**	**17**
23	**8**	**6**
$ر_1$ = **143**	$ر_2$ = **84**	$ر_3$ = **73**

ك = 7.08 ، $كا^2_{(0.05 ، 2)}$ = 5.991 . لذا نرفض فرض العدم وهو اعتبـــار أن الطرق الثلاث متكافئة.

المقارنة بين الطرق الثلاث :

هـــ = 50 ، أ ف م = 6.4

توجد فروق معنوية بين كل من الطرق أ ، ب وكذا أ ، حـــ.

تمرين (12):

وزعت ثلاثة أنواع من السماد عشوائياً علي مجموعة من قطع الأراضي المتجاورة والمزروعة بنوع القمح نفسه ومتشابهة في طريقة الري وفي جميع الظروف الأخرى فكان المحصول الناتج كما يلي :

السماد الأول	76	77	64	81	87	84	
السماد الثاني	75	62	51	70	72	74	69
السماد الثالث	63	66	79	57	59		

اختبر عند مستوي معنوية $\alpha = 5\%$ أن تأثير السماد متساويا مستخدما اختبار كروسكال واليز.

الحل:

1- فرض العدم : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل : ليست كل المتوسطات متساوية

2- المنطقة الحرجة هي : ك > $كا^2_{(0.05 ، 2)}$ = 5.991

3- نرتب المشاهدات ترتيب تصاعدي.

السماد الأول		السماد الثاني		السماد الثالث	
كمية الإنتاج	الرتبة	كمية الإنتاج	الرتبة	كمية الإنتاج	الرتبة
76	13	75	12	63	5
77	14	62	4	66	7
64	6	51	1	79	15
81	16	70	9	57	2
87	18	72	10	59	3
84	17	74	11		
		69	8		
	ر$_1$ = 84		ر$_2$ = 55		ر$_3$ = 32
	ن$_1$ = 6		ن$_2$ = 7		ن$_3$ = 5

وعلي ذلك فإن :

$$ك = \frac{12}{18\,(19)} \left(\frac{(84)^2}{6} + \frac{(55)^2}{7} + \frac{(32)^2}{5} \right) - 3(19) = 6.58$$

وحيث أن $ك = 6.85 > 5.991$ فإننا نرفض فرض العدم أي أن تأثير الأنواع الثلاثة من السماد ليس كله متساويا.

الفصل الثانى

الأرقام القياسية

الفصل الثاني

الأرقــــام القياسيـــة

(2-1) مقـــــدمـــة:

يعرف الرقم القياسى بانه النسبة التى تتغير بها ظاهرة ما اقتـــصادية أو تجارية وذلك بين زمنين مختلفين أو أزمنة مختلفة، أو بين مكانين مختـلفـــين أو أماكن مختلفة. ويستخدم الرقم القياسى عادة لقياس التغيير النسبى للأســـعار أو للكميات أو للقيم وذلك بالنسبة لسلعة واحدة أو مجموعة من السلع.

وكثيراً ما نحتاج لتتبع التغيرات التى تطرأ على ظاهرة معينـــة خـــلال فترة زمنية بين تاريخين محددين أو فى مكانين مختلفين، فلو فرضنا أن ســـعر سلعة ما فى عام 2000 كان 150جنيهاً للوحدة الواحدة وقد تغير سعر الـــسلعة بالزيادة ليصبح 225جنيهاً للوحدة الواحدة وذلك فى عام 2005. فى هذه الحالة نستطيع القول بأن السعر قد زاد بمعدل 50%.

كذلك كثيراً ما نحتاج إلى المقارنة بين التغيـــرات التـــى تطـــرأ علـــى ظاهرتين مختلفتين وذلك مثل المقارنة بين التغيرات فى عدد السكان من ســـنة لأخرى مع التغيرات فى الدخل القومى خلال السنة، أو التغيـــرات فـــى عـــدد المشتغلين فى إحدى الصناعات من سنة لأخرى مع التغيرات فى الإنتاج الكلـــى خلال السنة أو التغيرات فى نفقة المعيشة مع التغيرات فى مستوى الأجور.

وعند إجراء مثل تلك المقارنات يكون لدينا تاريخين زمنيين بينهما فترة زمنية، تبدأ بقياس التغيير الذى يطرأ على الظاهرة من التاريخ الأول ويـــسمى تاريخ الأساس (سنة الأساس) والتاريخ الثانى نود قياس ما تم من تغيير عنـــده منذ التاريخ الأساسى ويسمى التاريخ الجارى أو تاريخ المقارنة (سنة المقارنة).

فإذا أخذنا قيمة الوحدة عند سنة المقارنة كما فى مثالنا السابق فى عام 2005 وهى 225 جنيهاً وبالقسمة على قيمتها عند سنة الأساس فى عام 2000 وهى 150جنيهاً فيكون الرقم القياسى على النحو التالي :

$$\frac{\text{قيمة الوحدة فى سنة المقارنة}}{\text{قيمة الوحدة فى سنة الاساس}} \times 100 = \frac{225}{150} \times 100 = 150\% \qquad (1-2)$$

ويعنى هذا أن ما قيمته 100 وحدة نقدية عام 2000 أصبحت قيمته 150 وحدة نقدية عام 2005.

وبناء على النسبة السابقة يمكننا القول أنه إذا كان منسوب السعر يزيد عن 100% فإن ذلك يمثل ارتفاعاً فى السعر منذ سنة الأساس حتى سنة المقارنة.,وإذا كان منسوب السعر يقل عن 100% فإن ذلك يمثل انخفاضاً فى السعر منذ سنة الأساس حتى سنة المقارنة.

وللرقم القياسى عناصر لابد من توافرها وهى :

أولاً : الشمــــول

ويعنى ذلك اختيار السلع التى تدخل في تركيب الرقم القياسى واختيار المصادر التى يستقى منها أسعار السلع، فقد تكون السلع المتبادلة فى السوق كثيرة وهنا يجب إلا يقتصر الأمر على عمل رقم قياسى لسلعة واحدة ولكن يتطلب الأمر تكوين رقم قياسى يعبر عن التغيير العام فى أسعار تلك السلع، وحيث أن الأخذ فى الاعتبار كل السلع يستلزم جهداً ووقتاً فأننا يجب أن نستبعد من الاعتبار السلع قليلة الأهمية أو النادرة الاستعمال أو التى ليست لها تغيرات مستقبلية متوقعة.

ويتم جمع البيانات الخاصة بأسعار السلع ذات الأهمية والتى تدخل فى تكوين الرقم القياسى بالاستعانة بتجار مراسلين يتمتعون بالدقة والأمانة. وكلما شملت البيانات الخاصة بالأسعار عدداً أكبر من السلع وأنواعاً مختلفة للسلعة الواحدة وأسواقاً شاملة للتبادل الذى تم فيها كلما كانت الأرقام القياسية أكثر دقة فى تصوير الأسعار والتعبير عن التغير الذى يطرأ عليها.

ثانياً : اختيار تاريخ الأساس (سنة الأساس)

إن الغرض من عمل الأرقام القياسية أو تركيبها هو قياس التغير الذى طرأ على ظاهرة معينة كالأسعار خلال فترة من الزمن بين تاريخى أساس ومقارن وهذا يقتضى أن يكون تاريخ الأساس واقع فى فترة عادية هادئة بعيدة عن التغيرات الفجائية أو العرضية أو الشاذة. هذا ويجب أن يراعى أيضاً فى اختيار تاريخ الأساس إلا يبعد بفاصل زمنى كبير عن تاريخ المقارنة.

ثالثاً: اختيار الأوزان الترجيحية المناسبة

يجب أن تمثل الأسعار فى الرقم القياسى تمثيلاً يتناسب مع الأهمية النسبية لكل سلعة فى مجموعة السلع التى يتكون منها الرقم القياسى وذلك حتى يكون الرقم القياسى صالحاً للاستخدام. ويسمى الرقم القياسى الذى يعطى كل سلعة وزنا خاصا يتناسب مع أهمية السلعة بالرقم القياسى المرجح.

رابعاً: تلخيص البيانات واختيار الصيغ المناسبة

ليست هناك صعوبة أو مشكلة فى حالة تكوين رقم قياسى لسلعة واحدة ولكن مشاكل تركيب الأرقام القياسية تبدو أكثر وضوحاً عندما يراد قياس تغير أسعار سلع مختلفة كثيرة، ولذلك يجب اختيار الصيغ التى يمكن من خلالها ربط الأسعار المختلفة ببعضها.

وهناك عدة صور وصيغ رياضية تلخص التغيرات فى مختلف الأسعار أو الكميات. ويتوقف اختيار هذه الصور الرياضية على مدى توافر الإمكانيات المالية والفنية للهيئة التى تقوم بإصدار الأرقام القياسية وعلى مستوى الوعى الإحصائى لدى الأشخاص الذين تجمع منهم البيانات.

(2-2) الأرقام القياسية البسيطة

يمكن تكوين الرقم القياسى بصورة بسيطة وذلك من التعريف الأساسى للرقم القياسى. فمثلاً إذا كان لدينا بيانات عن سعر سلعة فى عام 2001 وبيانات عن سعر نفس السلعة فى عام 2006 ، أو بيانات عن سعر سلعة تباع فى مكان معين وبيانات عن سعر نفس السلعة فى مكان أخر، فأنه يمكننا تركيب رقم قياسى بسيط وذلك باختبار تاريخ زمنى أو مكان معين كأساس والمفردة (سعر أو كمية أو ...) فى هذا الأساس تؤخذ على أنها تساوى 100 أما المفردات الأخرى فى السلسلة (الأسعار أو الكميات أو ...) فتعرض فى صور نسب مئوية من هذا الأساس.

(2-2-1) منسوب السعر

إذا رمزنا لسعر سلعة ما فى سنة المقارنة بالرمز $س_1$ ولسعر السلعة فى سنة الأساس بالرمز $س_0$، فإن منسوب السعر (التغيير النسبى لسعر السلعة) سيكون كالآتى :

$$\text{منسوب السعر م.س} = \frac{\text{السعر فى سنة المقارنة}}{\text{السعر فى سنة الاساس}} \times 100$$

$$= \frac{س_1}{س_0} \times 100 \qquad (2-2)$$

مثال (2-1):

إذا كان سعر الوحدة من سلعة ما هو 13 جنيهات فى عــام 2000 ثــم تغيــر بالزيادة ليصبح 25 جنيهات فى عام 2003 فإن منسوب السعر (الرقم القياسى) لهذه السلعة يمكن تكوينه كما يلى :

$$\text{م.س} = \frac{\text{س}_1}{\text{س}_0} \times 100 = \frac{25}{13} \times 100 = 192.3\%$$

وهذا يعنى أن هناك ارتفاعا فى سعر هذه السلعة من عــام 2000 حتــى عــام 2003 بنسبة 92.3% من السعر الأساسى.

(2-2-2) منسوب الكمية

فى بعض الحالات قد يكون المرغوب فيه مقارنة كميات أو أحجام سلع معينة بدلاً من مقارنة أسعار هذه السلع. وفى هذه الحالة نقوم بحساب منسوب الكمية بدون تأثير للتغير فى السعر.

فإذا رمزنا لكمية سلعة فى سنة المقارنة بالرمز ك_1 ولكمية نفس السلعة فى سنة الأساس بالرمز ك_0 ، فإن منسوب الكمية (التغير النسبى لكمية السلعة) سيكون كالآتى :

$$\text{منسوب الكمية م.ك} = \frac{\text{الكمية فى سنة المقارنة}}{\text{الكمية فى سنة الاساس}} \times 100$$

$$= \frac{\text{ك}_1}{\text{ك}_0} \times 100 \qquad (3-2)$$

مثال (2-2):

إذا كانت الكمية المستهلكة من سلعة ما بواسطة أسرة معينة فى عام 2000 هى 200 كيلو ، ثم زادت إلى 350 كيلو فى عام 2005 لنفس الأسرة، فإن منسوب الكمية لهذه السلعة يمكن تكوينه كما يلى :

$$\text{م.ك} = \frac{\text{ك}_1}{\text{ك}_0} \times 100 = \frac{350}{200} \times 100 = 175\%$$

أى أن الكمية المستهلكة من السلعة زادت بنسبة 75% من الكمية الأساسية.

(2-2-3) منسوب القيمة

إذا رمزنا لسعر سلعة معينة بالرمز س وللكمية بالرمز ك فــان القيمـــة الكلية ق = السعر × الكمية = س ك. وبناء على ذلك إذا رمزنا للقيمة فى سنة المقارنة بالرمز $\text{ق}_1 = \text{س}_1 \text{ك}_1$ ، والقيمة فى سنة الأساس بالرمز $\text{ق}_0 = \text{س}_0 \text{ك}_0$ فان منسوب القيمة يمكن تكوينه كما يلى :

$$\text{منسوب القيمة م.ق} = \frac{\text{القيمة فى سنة المقارنة}}{\text{القيمة فى سنة الاساس}} \times 100$$

$$= \frac{\text{س}_1 \text{ك}_1}{\text{س}_0 \text{ك}_0} \times 100 \qquad (2-4)$$

مثال (2-3):

إذا كان سعر سلعة ما هو 2 جنيهاً للكيلو عام 2000 ثم ارتفع إلى 3 جنيهــات للكيلو عام 2004، وكان استهلاك أحد الأسر لهذه السلعة هو 80 كيلو فى عــام 2000، ارتفع إلى 120 كيلو فى عام 2004 فان منسوب القيمة لهــذه الــسلعة يمكن تكوينه كما يلى :

$$\text{م.ق} = \frac{\text{كمية } 2004 \times \text{سعر } 2004}{\text{كمية } 2000 \times \text{سعر } 2000} \times 100 = \frac{3 \times 120}{2 \times 80} \times 100 = 225\%$$

أى أن القيمة ارتفعت بنسبة 125% من القيمة الأساسية

(2-3) طرق تركيب الأرقام القياسية

توجد طريقتين لتركيب الأرقام القياسية وهما الطريقة التجميعية وطريقة المناسيب.

(2-3-1) الطريقة التجميعية

تتكون الأرقام القياسية طبقاً لهذه الطريقة من النسبة المئوية لمجموع أسعار (كميات أو قيم) سلعة ما فى تاريخ المقارنة إلى مجموع أسعارها (كميات أو قيم) فى سنة الأساس. والصيغ المختلفة لها هى :

1- الرقم التجميعى البسيط

إذا رمزنا لأسعار السلع فى سنة الأساس بالرمز $س_0$ وفى سنة المقارنة بالرمز $س_1$ ، فإن الرقم التجميعى البسيط يتكون كالتالى:

$$\text{الرقم التجميعى البسيط} = \frac{\text{مجـ } س_1}{\text{مجـ } س_0} \times 100 \qquad (2-5)$$

وهذا الرقم هو أسهل الأرقام القياسية عملاً وتركيباً.

مثال (2-4):

جدول (2-1) يبين أسعار مجموعة من السلع فى الفترة من عام 1985 حتى عام 1995 .

جدول (2-1)

أسعار مجموعة من السلع فى الفترة من عام 1995 حتى عام 2005 .

السلعـــــة	السعـــر فى 1995	السعـــر فى 2005
أ	8	12
ب	25	32
حـ	6	10
المجموع	39	54

والمطلوب : حساب الرقم التجميعى البسيط للأسعار.

الحل:

$$\text{الرقم التجميعى البسيط للأسعار} = \frac{\text{مجـ } س_1}{\text{مجـ } س_0} \times 100 = \frac{54}{39} \times 100 = 138.5\%$$

أى أن منسوب الأسعار لهذه السلع قد ارتفع بنسبة 38.5% فى الفترة من عام 1995 حتى عام 2005 .

وللرقم التجميعى البسيط عيوب منها معاملة السلع كلها معاملة واحدة بمعنى انه يفترض أن السلع لها نفس الأهمية النسبية. بالإضافة إلى ذلك فإن اختلاف وحدات القياس يجعل الرقم التجميعى البسيط لا يستوفى ما يعرف باختيار الوحدات.

2- الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير)

حيث أن الرقم التجميعى البسيط يسوى فى المعاملة بين جميع السلع ويفقدها أهميتها النسبية، لهذا كان لابد من استخدام صيغ أخرى لتركيب الأرقام القياسية يراعى فيها تخليص الرقم من تأثيرات الوحدات المستخدمة على الأهمية

النسبية للسلع وذلك بترجيح كل سلعة بالمقارنة بمجموعة السلع الأخرى بميزان يختلف تبعاً لأهميتها النسبية (الترجيح بالأوزان).

ومن المعتاد أن تقاس هذه الأهمية النسبية بالكمية المستهلكة من السلع. وبفرض أننا استخدمنا الكميات المستهلكة فى سنة الأساس للترجيح، يكون الرقم القياسى الناتج هو :

$$\text{الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير)} = \frac{\text{مجـ}\ س_1\ ك_0}{\text{مجـ}\ س_0\ ك_0} \times 100 \qquad (6-2)$$

مثال (2-5):

جدول (2-2) يوضح أسعار وكميات مجموعة من السلع فى الفترة ما بين عـام 1995 وعام 2000.

جدول (2-2)

أسعار وكميات مجموعة من السلع فى الفترة ما بين عام 1995 وعام 2000.

السلعة	السعر		الكمية	
	1995	2000	1995	2000
أ	10	15	200	160
ب	200	250	80	50
حـ	5	10	300	200
د	35	25	100	150

والمطلوب:

إيجاد الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس (لاسبير).

الحل:

$$\text{رقم لاسبير} = \frac{\text{مجـ}\ س_1\ ك_0}{\text{مجـ}\ س_0\ ك_0} \times 100$$

وهذا يتطلب تكوين جدول (2-3) لحاصل ضرب السعر فى الكمية على النحـو التالى :

جدول (2-3)

حاصل ضرب السعر فى الكمية

السلعة	$س_0$	$س_1$	$ك_0$	$س_1 ك_0$	$س_0 ك_0$
أ	10	15	200	3000	2000
ب	200	250	80	20000	16000
حـ	5	10	300	3000	1500
د	35	25	100	2500	3500
المجموع				28500	23000

$$\therefore \text{الرقم التجميعى المرجح لكميات سنة الأساس} = \frac{28500}{23000} \times 100 = 123.9\%$$

أى أن منسوب الأسعار قد ارتفع بنسبة 23.9% فى الفترة من عام 1995الى عام 2000.

ومن عيوب الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس أنه يسوى فى الأهمية النسبية بين الأسعار المرتفعة والأسعار المنخفضة وبذلك يكـون هـذا الرقم متحيزاً إلى اعلى. كما أن اختلاف الظروف والتقاليد والعادات قد تغير من استهلاك سلعة ما بصرف النظر عن تغيير الأسعار.

3- الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة المقارنة (باش)

يرى البعض أنه يحسن استخدام كميات سنة المقارنة كأساس للتـرجيح بأوزان بدلاً من كميات سنة الأساس ، وسنرمز للكميات فى سنة المقارنة بالرمز $ك_1$. وعلى هذا يتكون لدينا الصيغة التالية:

$$\text{الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة المقارنة} = \frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_1} \times 100 \quad (2-7)$$

مثال (2-6):

فى المثال السابق(2-5)استخرج الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة المقارنة باش.

الحل:

لإيجاد الرقم التجميعى يتطلب الأمر إنشاء جدول (2-4)

جدول (2-4)

السلعة	$س_1$	$س_0$	$ك_1$	$س_1 ك_1$	$س_0 ك_1$
أ	15	10	160	2400	1600
ب	250	200	50	12500	10000
حـ	10	5	200	2000	1000
د	25	35	150	3750	5250
المجموع				20650	17850

$$\therefore \text{رقم باش} = \frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_1} \times 100$$

$$= \frac{20650}{17850} \times 100 = 115.69\%$$

ومن عيوب هذا الرقم أنه يتحيز إلى أسفل لأن السلع التى انخفض ثمنها تزداد الكمية المستهلكة منها ولذلك فهى تعطى أهمية أكبر مما يجب بمجـرد أن ثمنها قد انخفض.

يمكن التوفيق بين نوعى الترجيحات السابقة على النحو التالى :

الرقم التجميعى المرجح بكميات سنتى الأساس المقارنة

$$= \frac{\text{مجـ } س_1 (ك_0 + ك_1)}{\text{مجـ } س_0 (ك_0 + ك_1)} \times 100 \qquad (2-8)$$

ومن المثال السابق يمكن إيجاد هذا الرقم من جدول (2-5)

جدول (2-5)

السلعة	$س_1$	$س_0$	$ك_1$	$ك_0$	$(ك_0+ك_1)$	$س_1(ك_0+ك_1)$	$س_0(ك_0+ك_1)$
أ	15	10	160	200	360	5400	3600
ب	250	200	50	80	130	32500	26000
حـ	10	5	200	300	500	5000	2500
د	25	35	150	100	250	6250	8750
المجموع						49150	40850

∴ الرقم القياسى المرجح لكميتى الأساس والمقارنة هو

$$\frac{49150}{40850} \times 100 = 120.3\%$$

5- الرقم الأمثل لفيشر

استنتج فيشر رقماً قياسياً له مزايا أكبر من الأرقام القياسية السابقة. ويتركب هذا الرقم من رقمين قياسيين مستقلين ، يستخدم فى أحدهما أوزان سنة الأساس وفى الثانى أوزان سنة المقارنة. ويسمى الرقم القياسى المستنتج بهذه الطريقة بالرقم الأمثل ن وصيغة هذا الرقم هو الوسط الهندسى لكل من الرقم القياسى المرجح بكميات سنة الأساس والرقم القياسى المرجح بكميات سنة المقارنة كالآتى :

$$\text{الرقم الأمثل لفيشر} = \sqrt{\frac{\text{مجـ } س_1 ك_0}{\text{مجـ } س_0 ك_0} \times \frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_1}} \times 100 \qquad (2-9)$$

ومن المثال السابق نجد أن:

$$\text{الرقم الأمثل لفيشر} = \sqrt{\frac{28500}{23000} \times \frac{20650}{17850}} \times 100$$

$$= \sqrt{123.91 \times 115.69} = 119.8\%$$

(2-3-2) طريقة المناسيب

طبقاً لهذه الطريقة يحسب لكل سلعة منسوب (أى رقم قياسى). والمنسوب عبارة عن رقم قياسى جزئى يعكس التغيير فى الظاهرة فى سنة المقارنة بالنسبة لسنة الأساس.

$$\text{المنسوب} = \frac{\text{الظاهرة فى سنة المقارنة}}{\text{الظاهرة فى سنة الأساس}} \times 100 \qquad (10-2)$$

ثم تستخدم المتوسطات فى إيجاد الرقم القياسى العام لهذه الظاهرة بالنسبة للسلع كلها طبقاً للصيغ الآتية :

1- الرقم القياسى بطريقة الوسط الحسابى البسيط للمناسيب

بعد إيجاد المناسيب يحسب متوسطها باستخدام الوسط الحسابى فيكون هذا المتوسط هو الرقم القياسى المطلوب. فإذا رمزنا لمناسيب الأسعار بالرمز م س_1 ، م س_2 ، ....، $\text{م س}_\text{ن}$ حيث $\text{م س}_\text{ر} = \frac{\text{س}_{1\text{ر}}}{\text{س}_{0\text{ر}}} \times 100$

فإنه يمكن حساب متوسط المناسيب كالآتى :

$$\text{الوسط الحسابى للمناسيب} = \frac{\text{م س}_1 + \text{م س}_2 + \ldots\ldots + \text{م س}_\text{ن}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجـ م س}_\text{ر}}{\text{ن}} \qquad (11-2)$$

مثال (2-7):

أوجد الوسط الحسابى البسيط للمناسيب لجدول (2-6)

جدول (2-6)

السلعة	السعر فى 1995	السعر فى 2000
أ	15	10
ب	250	200
حـ	10	5
د	25	35

الحل : لإيجاد الوسط الحسابى للمناسيب نقوم بعمل جدول (2-7)

جدول (2-7)

السلعة	$س_1$	$س_0$	$م س = \frac{س_1}{س_0} \times 100$
أ	15	10	$\frac{15}{10} \times 100 = 150\%$
ب	250	200	$\frac{250}{200} \times 100 = 125\%$
حـ	10	5	$\frac{10}{5} \times 100 = 200\%$
د	25	35	$\frac{25}{35} \times 100 = 71.4\%$

$\therefore$ مجـ م س = 150 + 125 + 200 + 71.4 = 546.4

$\therefore$ الوسط الحسابى للمناسيب = $\frac{\text{مجـ م س}}{ن} = \frac{546.4}{4} = 136.6\%$

2- الرقم القياسى بطريقة الوسط الهندسى البسيط للمناسيب

يعرف الوسط الهندسى لمجموعة من القيم عددها ن (ليس من بينهما الصفر) هو الجذر النونى لحاصل ضرب هذه القيم.

فإذا كان لدينا القيم م $س_1$ ، م $س_2$ ، ......، م $س_ن$ فإن الوسط الهندسى ، ويرمز له بالرمز ط يمكن حسابه كالتالى:

$$ط = \sqrt[ن]{م\ س_1 \times م\ س_2 \times ..... \times م\ س_ن}$$

أى أن لو ط = $\frac{1}{ن}$ مجـ لو م $س_ر$ (12-2)

وباستخدام الأرقام الواردة فى المثال السابق، يمكن إيجاد الوسط الهندسى كما فى جدول (2-8)

جدول (2-8)

السلعة	$س_0$	$س_1$	م س	لو م س
أ	10	15	150	2.1761
ب	200	250	125	2.0969
حـ	5	10	200	2.3010
د	35	25	71.4	1.8537
المجموع				8.4277

$\therefore$ لو ط = $\frac{1}{ن}$ مجـ لو م $س_ر$ = $\frac{8.4277}{4}$ = 2.1069

وبالكشف فى جدول الأعداد المقابلة للوغاريتمات نجد أن :

ط = 127.9 % وهو ما يسمى بالوسط الهندسى البسيط للمناسيب

3- الرقم القياسى بطريقة الوسط الحسابى المرجح للمناسيب

استخدام فكرة المتوسط البسيط للمناسيب تؤدى إلى تخليص الرقم القياسى من تأثير الوحدات المستعملة فى القياس. ولكن إعطاء المناسيب أوزان متساوية فى الوقت الذى تختلف فيه الأهميات النسبية للسلع الداخلة فى تركيب الرقم يعد نقصاً واضحاً فى تركيب الرقم. ويمكن استخدام أوزان معينة نرجح بها هذه المناسيب ونحصل على متوسط بسيط حتى يعكس الرقم التغيير الحقيقى فى بنود الظاهرة محل الدراسة.

وللترجيح فى هذه الطريقة نستخدم القيمة كأوزان بدلاً من استخدام الكميات كما فى الطريقة المرجحة. والسبب فى اختيار قيمة المستهلك كأوزان أو ترجيحات أن القيمة أصدق فى التعبير عن أهمية السلع من كمية المستهلك منها. هذا علاوة على أن اختلاف الوحدات المستخدمة فى قياس كمية المستهلك لا تمكن من جمع الكميات المستهلكة وبالتالى يصعب عمل الترجيح.

ويمكن أن يتم الترجيح باستخدام القيمة فى سنة الأساس أو القيمة فى سنة المقارنة على النحو التالى :

(أ) الوسط الحسابى المرجح بالقيم فى سنة الأساس $(\text{م}\ \bar{\text{س}})_0$

فى هذه الحالة فإن صيغة الرقم هى :

$$(\text{م}\ \bar{\text{س}})_0 = \frac{\text{مجـ}\ \text{م}_{\text{س}}\ \text{ق}_0}{\text{مجـ}\ \text{ق}_0} = \frac{\text{مجـ}\ \left(\frac{\text{س}_1}{\text{س}_0} \times 100\right) \text{س}_0 \times \text{ك}_0}{\text{مجـ}\ \text{س}_0 \times \text{ك}_0} \qquad (13-2)$$

والصيغة المختصرة هي

$$\overline{(م\ س)}_0 = \frac{\sum س_1 ك_0}{\sum س_0 ك_0} \times 100 \qquad (14-2)$$

وهو نفس الرقم القياسي المرجح بكميات سنة الأساس.

مثال (2-8):

فى مثال (2-5) أوجد الوسط الحسابى المرجح بالفترة فى سنة الأساس

الحل:

يمكن إنشاء جدول (2-9).

جدول (2-9)

م س (مناسيب الأسعار)	$ق_0 = (س_0 ك_0)$	م س × $ق_0$
150	2000	300000
125	16000	2000000
200	1500	300000
71.4	3500	249900
المجموع	23000	2849900

∴ الوسط الحسابى المرجح للمناسيب بالقيم فى سنة الأساس $\overline{(م\ س)}_0$

$$= \frac{\sum م\ س\ ق_0}{\sum ق_0} = \frac{2849900}{23000} = \%123.9$$

وهى نفس النتيجة التى حصلنا عليها باستخدام رقم لاسبير (الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس).

(ب) الوسط الحسابى المرجح بالقيمة فى سنة المقارنة

فى هذه الحالة فإن صيغة الرقم هى :

$$\overline{(م\ س)}_1 = \frac{\sum م\ س\ ق_1}{\sum ق_1} = \frac{\sum \left(\frac{س_1}{س_0} \times 100\right) س_1 ك_1}{\sum س_1 \times ك_1} \qquad (15-2)$$

وبنفس الطريقة السابقة يمكن أن نستخرج الأعمدة:

م س = $\left(\frac{س_1}{س_0} \times 100 \right)$ ، ق$_1$ = س$_1$ × ك$_1$ ، م س × ق$_1$

ومن الملاحظ أن هذا الرقم لا يساوى الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة المقارنة (رقم باش).

مثال (2-9):

فى مثال (2-5) أوجد الوسط الحسابى المرجح بالقيمة فى سنة المقارنة ($\overline{م س}$)$_1$.

الحل:

$$(\overline{م س})_1 = \frac{مجـ م س ق_1}{مجـ ق_1}$$

ولهذا نُحتاج إلى إنشاء جدول (2-10)

جدول (2-10)

م س (المناسيب)	ق$_1$ =(س$_1$ ك$_1$)	م س × ق$_1$
150	2400	360000
125	12500	1562500
200	2000	400000
71.4	3750	267750
المجموع	20650	2590250

$$\therefore (\overline{م س})_1 = \frac{مجـ م س ق_1}{مجـ ق_1} = \frac{2590250}{20650} = \%125.4$$

4- الرقم القياسى بطريقة الوسط الهندسى المرجح للمناسيب (سنة الأساس)

يتم الترجيح فى هذا الرقم القياسى باستخدام القيمة فى سنة الأساس على النحو التالى :

$$\text{ط}_{\text{ق}} = \sqrt[\text{مجـ س}_0\text{ك}_0]{(\text{م س})_1^{(\text{س}_0\text{ك}_0)_1} \times (\text{م س})_2^{(\text{س}_0\text{ك}_0)_2} \times \ldots \times (\text{م س})_{\text{ن}}^{(\text{س}_0\text{ك}_0)_{\text{ن}}}} \qquad (16-2)$$

وإذا فرضنا أن $\text{س}_0 \text{ك}_0 = \text{ق}_0$

$$\therefore \text{ط}_{\text{ق}} = \sqrt[\text{مجـ ق}_0]{(\text{م س})_1^{(\text{ق}_0)_1} \times (\text{م س})_2^{(\text{ق}_0)_2} \times \ldots \times (\text{م س})_{\text{ن}}^{(\text{ق}_0)_{\text{ن}}}} \qquad (17-2)$$

مثال (2-10):

إذا كانت أسعار البيع والكميات المباعة من أربعة أنواع من السلع الرئيسية (أ ، ب ، حـ ، د) فى العامين 1995 ، 2005 كالموضح فى جدول (2-11).

جدول (2-11)

أسعار البيع والكميات المباعة من أربعة أنواع من السلع الرئيسية

السلعـــــة	سعر بيع الوحدة بالجنيه		الكمية المباعة بملايين الوحدات	
	1995	2005	1995	2005
أ	,10	,15	80	200
ب	10	9	10	5
حـ	,8	1	50	75
د	,2	,25	100	100

المطلوب:

إيجاد الرقم القياسى بطريقة الوسط الهندسى المرجح للمناسيب بالقيمة فى ســنة الأساس 1995.

الحل:

يمكن إيجاد الرقم القياسى كما فى جدول (2-12)

جدول (12-2)

م س=(مناسيب الأسعار)	$ق_0$ = ($س_0 ك_0$)	لو $م س_0$	$ق_0$ لو $م س_0$
$(م س)_1 = \frac{,15}{,10} \times 100 = 150$	$(ق_0)_1 = ,1 \times 8 = 8$	2.1761	17.4088
$(م س)_2 = \frac{9}{10} \times 100 = 90$	$(ق_0)_2 = 10 \times 10 = 100$	1.9542	195.4200
$(م س)_3 = \frac{1}{,8} \times 100 = 125$	$(ق_0)_3 = ,8 \times 50 = 40$	2.0969	83.8760
$(م س)_4 = \frac{,25}{,20} \times 100 = 125$	$(ق_0)_4 = ,2 \times 100 = 20$	2.0969	41.938
المجمـــــوع	168		338.6428

لو الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار المرجح بالقيمة فى سنة الأساس

$$= \text{لو ط ق} = \frac{1}{مجـ ق_0} \text{ لو } \left((م س)_1^{(ق_0)_1} \times (م س)_2^{(ق_0)_2} \times (م س)_ن^{(ق_0)_ن} \right)$$

$$= \frac{1}{مجـ ق_0} \left(\text{لو } (م س)_1^{(ق_0)_1} + \text{لو } (م س)_2^{(ق_0)_2} + \text{لو } (م س)_ن^{(ق_0)_ن} \right)$$

$$= \frac{(ق_0)_1 \text{ لو } (م س)_1 + (ق_0)_2 \text{ لو } (م س)_2 + \dots + (ق_0)_ن \text{ لو } (م س)_ن}{مجـ ق_0}$$

$$\therefore \text{لو ط ق} = \frac{ق_0 \text{ مجـ م س}}{مجـ ق_0} \qquad (18-2)$$

$$\therefore \text{لو ط ق} = \frac{338.6428}{168} = 2.01572$$

∴ الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار المرجح بالقيم فى سنة الأساس=102.74%

وبالتالى يمكن حساب الرقم القياسى بطريقة الوسط الهندسى المرجح للمناسيب بالقيمة فى سنة المقارنة وذلك باستبدال $س_0 ك_0$ بالقيمة $ق_1 = س_1 ك_1$.

(2-4) الأساس الثابت والمتحرك فى تركيب الرقم القياسى

يلاحظ من استعراضنا للأرقام القياسية أننا كنا نعتمد اعتماداً كلياً على سنة الأساس. ومن الواضح أن الفترة المرتبطة بها إذا لم تكن نموذجية وعادية وخالية من المؤثرات فان الرقم القياسى المستنتج على هذا الأساس يكون مضللاً. هذا فضلاً على أن بعد سنة المقارنة عن سنة الأساس يؤثر على الرقم القياسى بسبب تغيير الظروف المحيطة بقيم الظاهرة. ففى حالة الأرقام القياسية للأسعار نلاحظ اختفاء بعض السلع أو ضعف الإقبال عليها وظهور سلع أخرى بديلة أو جديدة أو تغير أهمية سلعة بالنسبة للسلع الأخرى فتتغير بذلك أوزان الترجيح.

(2-4-1) الأساس الثابت والمتحرك

فإذا كانت سنة المقارنة قريبة من سنة الأساس أمكن إتباع الأساس الثابت فى إعداد الرقم القياسى بأن ننسب الأسعار فى السنوات المقارنة إلى أسعار سنة الأساس. وتتخذ مناسيب الأسعار فى حالة الأساس الثابت الصورة التالية :

$$\frac{س_2}{س_1} \times 100 \quad ، \quad \frac{س_3}{س_1} \times 100 \quad ، \quad \frac{س_4}{س_1} \times 100 \quad ، \ldots$$

حيث $س_1$ أسعار سنة الأساس ، $س_2$ هى أسعار السنة الثانية ، $س_3$ أسعار السنة الثالثة وهكذا.

كما يمكن تركيب الرقم القياسى لظاهرة ما فى عدة فترات بنسبة قيمة الظاهرة فى كل فترة إلى قيمتها فى الفترة التى قبلها مباشرة وتسمى هذه الطريقة بطريقة الأساس المتحرك (السلسلة) على النحو التالى :

$$\frac{س_2}{س_1} \times 100 \quad ، \quad \frac{س_3}{س_2} \times 100 \quad ، \quad \frac{س_4}{س_3} \times 100 \quad ، \ldots$$

وتستخدم طريقة الأساس المتحرك لاعتبارات كثيرة أهمها :

1- الاعتبارات العلمية

فمن المفيد للتخطيط أن نتعرف على مقدار التغير النسبى الذى حدث فى قيمة الواردات فى 1995 بالنسبة لسنة 1994 لا بالنسبة لسنة 1950 مثلاً.

2- اختلاف طبيعة الظاهرة

اختلاف طبيعة الظاهرة أو طرق قياسها أو عدم توفر بيانات مفصلة عنها يقلل من إمكانيات الأساس الثابت لها.

3- التغيرات الاتجاهية

إن استخدام الأساس المتحرك يمكن الباحث من التخلص من التغيرات الاتجاهية أى التغيرات الطويلة الأجل وبذلك يمكن التركيز على دراسة التغيرات القصيرة الأجل فى سلسلة الأرقام القياسية المحسوبة على الأساس المتحرك.

مثال (2-11):

جدول (2-13) يمثل قيمة المنتج فى بعض القطاعات الصناعية فى دولة ما فى الفترة 1997-2000.

جدول (2-13)

قيمة المنتج فى بعض القطاعات الصناعية فى دولة ما

السنــــــــة	1997	1998	1999	2000
الصناعات التحليليــة	296	423	473	553
الصناعات التعدينيــة	4	6	7	8
الصناعات البترولــيــة	4	61	58	66
قطاع الكهربــــــــاء	10	18	21	29
إجمالى الصناعـــة	314	508	559	656

أولاً: الأساس الثابت

- الرقم التجميعى البسيط بطريقة الثابت سنة 1997 = 100
- الرقم القياسى لقيمة الإنتاج الصناعى 1997/2000 = $\frac{508}{314} \times 100 = 162$
- الرقم القياسى لقيمة الإنتاج الصناعى 1997/1999 = $\frac{559}{314} \times 100 = 178$
- الرقم القياسى لقيمة الإنتاج الصناعى 1997/1998 = $\frac{656}{314} \times 100 = 209$

ثانياً: الأساس المتحرك

- الرقم القياسى لقيمة الإنتاج الصناعى 1997/1998 = $\frac{508}{314} \times 100 = 162$
- الرقم القياسى لقيمة الإنتاج الصناعى 1998/1999 = $\frac{559}{508} \times 100 = 110$
- الرقم القياسى لقيمة الإنتاج الصناعى 1999/2000 = $\frac{656}{559} \times 100 = 117$

(2-4-2) التحويل من الأساس الثابت للمتحرك والعكس

من المشاكل التى تصادف الباحثين عند استخدامهم لسلسلة زمنيـة مـن الأرقام القياسية تحويل هذه الأرقام إلى أساس ثابت أو متحرك. فإذا كان لـدينا أرقاماً قياسية للإنتاج الصناعى محسوبة بطريقة الوسط الحسابى للمناسيب على اعتبار سنة 1982 كأساس ثابت على النحو التالى :

السنة	1982	1988	1989	1990
الرقم القياسى	100	167	188	225

وبفرض أنه لأى غرض نود تحويل السلسلة من الأساس الثابت إلـى الأسـاس المتحرك ، فيمكننا تحقيق ذلك على النحو التالى :

الرقم القياسى لإنتاج سنة 1989 بالنسبة لإنتاج سنة 1988

$$= \left(\frac{\text{الإنتاج } 1989}{\text{الإنتاج } 1982} \div \frac{\text{الإنتاج } 1988}{\text{الإنتاج } 1982} \right) \times 100$$

$$= \left(\frac{\text{الإنتاج } 1989}{\text{الإنتاج } 1982} \times \frac{\text{الإنتاج } 1982}{\text{الإنتاج } 1988} \right) \times 100 = 112$$

وبالمثل الرقم القياسى لإنتاج سنة 1990بالنسبة لسنة 1989= $\frac{225}{188} \times 100 = 120$

وبفرض أن سلسلة الأرقام القياسية لها أساس متحرك ونود تحويلها إلى أسـاس ثابت على النحو التالى بالنسبة للإنتاج الصناعى :

السنة	1988	1989	1990
رقم قياسى متحرك	167	113	120

ولإرجاع هذه السلسلة لسنة 1982 كأساس ثابت نتبع الآتى:

الرقم القياسى للإنتاج الصناعى1989/1982= $\frac{\text{الإنتاج 1989}}{\text{الإنتاج 1988}} \times \frac{\text{الإنتاج 1988}}{\text{الإنتاج 1982}} \times 100$

$$= \frac{113}{100} \times \frac{167}{100} \times 100 = 189$$

الرقم القياسى للإنتاج الصناعى1990/1982= $\frac{120}{100} \times \frac{113}{100} \times \frac{167}{100} \times 100 = 226$

مثال (2-12):

المطلوب: تحويل الأرقام القياسية التالية بطريقة الأساس المتحرك إلى أرقام قياسية بطريقة الأساس الثابت (اجعل سنة 1985 سنة أساس).

السنوات	1986	1987	1988	1989	1990
الرقم القياسى	105	85	98	112	110

الحل:

الرقم القياسى لسنة 87 باعتباره 85 كأساس $= \frac{85}{100} \times \frac{105}{100} \times 100 = 89.25\%$

الرقم القياسى لسنة 88 باعتباره 85 كأساس $= \frac{98}{100} \times \frac{89.25}{100} \times 100 = 87.46\%$

الرقم القياسى لسنة 89 باعتباره 85 كأساس $= \frac{112}{100} \times \frac{87.46}{100} \times 100 = 97.97\%$

الرقم القياسى لسنة 90 باعتباره 85 كأساس $= \frac{110}{100} \times \frac{98}{100} \times 100 = 107.8\%$

(2-4-3) مزايا وعيوب طريقة السلسلة (الأساس المتحرك)

تمتاز هذه الطريقة بالمرونة. فمن الممكن إدخال أى تعديل على الرقم القياسى نتيجة للتغيرات التى قد تحدث لعناصره من زيادة أو نقص أهمية سلعة ما بزيادة أو نقص الاستهلاك منها وبالتالى تتغير الأوزان التى نرجح بها السلع. كما تمكننا هذه الطريقة من قياس التغيرات بين سنتين غير متتاليتين وذلك بضرب الأرقام القياسية السنوية فى بعضها البعض.

أما عيوب طريقة السلسلة فهى صعوبة مدلول الرقم. فإذا فرضنا أن الأرقام القياسية لأسعار مجموعة من السلع فى أربعة شهور متتالية مستخدمين طريقة السلسلة هى 200 فى فبراير (يناير كأساس) ، 120 فى مارس ، 50 فى ابريل ، 50 فى مايو فقد يفهم من ذلك خطأ أن الأسعار خلال شهر فبراير ومارس وابريل فى انخفاض وأن الأسعار فى شهر مايو تساوى الأسعار فى شهر ابريل. إلا أن المعنى الصحيح هو أن الأسعار فى شهر فبراير ضعف الأسعار فى شهر يناير ، والأسعار فى شهر مارس تزيد عن الأسعار فى شهر فبراير بنسبة 20% والأسعار فى شهر ابريل تقل عن الأسعار فى شهر مارس بنسبة 50% والأسعار فى شهر مايو تقل عن الأسعار فى شهر ابريل بنسبة 50%.

كما أن من عيوب الأرقام القياسية المحسوبة بطريقة السلسلة بالنسبة لسنة سابقة بطريق غير مباشر لا تتفق مع تلك المحسوبة بالطريقة المباشرة.

(5-2) اختبار جودة الأرقام القياسية

رأينا فيما سبق أن هناك عدة طرق مختلفة لحساب الأرقام القياسية بواسطة صيغ كثيرة مختلفة. وليس من المتوقع طبعاً أن ينتج عن هذه الصيغ المختلفة أرقاماً متساوية. ولكن هذه الصيغ رغم صلاحية كل منها فى حالات خاصة تتوقف على نوع البيانات وعلى المراد تمثيله تماماً بالرقم القياسى إلا أنها على درجات مختلفة من الجودة. فالرقم القياسى الجيد هو ما يحقق عدة شروط أهمها اثنان :

أولاً : اختبار الانعكاس فى الزمن

ومعنى ذلك أنه إذا كان سعر سلعة معينة فى السنة المقارنة هو ضعف سعرها فى سنة الأساس فمن المسلم به أن يكون سعرها فى سنة الأساس نصف سعرها فى سنة المقارنة. وبالمثل فإذا كان الرقم القياسى للأسعار سنة 1993 يساوى 200% باعتبار أن سنة الأساس هى 1970 فيجب أن يكون الرقم القياسى للأسعار فى سنة 1970 يساوى 50% باعتبار أن سنة 1990 هى الأساس ، أو بمعنى آخر إذا عكسنا وضع سنتى الأساس والمقارنة وحصلنا على رقم قياسى جديد فإن حاصل ضرب هذا الرقم فى الرقم الأصلى يجب أن يساوى الواحد الصحيح. فأى رقم قياسى يؤدى إلى هذه النتيجة تماماً يقال أنه رقم قابل للانعكاس فى الزمن ، أو أنه اجتاز اختبار الانعكاس فى الزمن ، ويعتبر رقماً جنيداً من هذه الناحية.

وتتلخص فكرة الانعكاس فى الزمن فيما يلى :

1- تحديد المعادلة المراد اختبارها.

2- حساب البديل الزمنى لها وهو نفس صيغة المعادلة ولكن بإبدال الأساس بالمقارنة ، والمقارنة بالأساس. ويتم هذا عملياً بوضع الدليل " 0 " مكان الدليل " 1 " والعكس بالعكس ونفس التعديل بالنسبة للكميات.

3- ضرب المعادلة الأصلية فى بديلها الزمنى. فإذا كان حاصل الضرب يساوى واحد صحيحاً فإن هذا الرقم ينجح فى اختبار الانعكاس فى الزمن.

مثال (2-13):

المطلوب : اختبار ما إذا كانت الأرقام القياسية التالية تنعكس فى الزمن :

1- الرقم التجميعى البسيط.

2- الرقم التجميعي المرجح بكميات الأساس.

3- الرقم التجميعي المرجح بمجموع كميتى الأساس والمقارنة.

4- الرقم الأمثل.

5- الوسط الحسابي البسيط للمناسيب.

6- الوسط الحسابي المرجح بأسعار المقارنة للمناسيب.

الحل:

(1) الرقم التجميعي البسيط = $\frac{\text{مجـ } س_1}{\text{مجـ } س_0}$

البديـــل الزمنى = $\frac{\text{مجـ } س_0}{\text{مجـ } س_1}$

حاصل الضرب = $\frac{\text{مجـ } س_1}{\text{مجـ } س_0} \times \frac{\text{مجـ } س_0}{\text{مجـ } س_1} = 1$

∴ الرقم التجميعي البسيط ينجح فى اختبار الانعكاس فى الزمن.

(2) الرقم التجميعي المرجح بكميات الأساس = $\frac{\text{مجـ } س_1 ك_0}{\text{مجـ } س_0 ك_0}$

البديـــل الزمنـــى = $\frac{\text{مجـ } س_0 ك_0}{\text{مجـ } س_1 ك_1}$

حاصل الضـــرب = $\frac{\text{مجـ } س_1 ك_0}{\text{مجـ } س_0 ك_0} \times \frac{\text{مجـ } س_0 ك_1}{\text{مجـ } س_1 ك_1} \neq 1$

∴ الرقم التجميعي المرجح بكميات الأساس لا ينجح فى اختبار الانعكاس فى الزمن.

(3) الرقم التجميعي المرجح بمجموع = $\frac{\text{مجـ } س_1 (ك_0 + ك_1)}{\text{مجـ } س_0 (ك_0 + ك_1)}$

كمَيتى الأساس والمقارنة

البديـــل الزمنـــى $= \dfrac{\text{مجـ } س_0(ك_1 + ك_0)}{\text{مجـ } س_1(ك_1 + ك_0)}$

حاصـــل الضــــرب $= \dfrac{\text{مج } س_1(ك_0+ك_1)}{\text{مج } س_0(ك_0+ك_1)} \times \dfrac{\text{مج } س_0(ك_0+ك_1)}{\text{مج } س_1(ك_0+ك_1)} = 1$

∴ الرقم التجميعى المرجح بالوسط الحسابى بكميتى الأساس والمقارنة ينجح فى اختبار الانعكاس فى الزمن.

وهكذا نجد أنه لا يحقق شرط الانعكاس فى الزمن سوى خمسة أرقـام قياسية هى : التجميعى البسيط ، والتجميعى المرجح بمتوسط حسابى أو هندسى لكميتى الأساس والمقارنة ، والأمثل ، والهندسى البسيط للمناسيب.

ثانياً : اختبار الانعكاس فى المعامل

الأرقام القياسية التى سبق استعراضها تقـيس الأسـعار. وقـد رأينـا ترجيحها بالكميات ، أى أن الأسعار هى الأصل فى حساب الأرقام والكميـات معاملات لهذه الأسعار. فإذا عكسنا الوضع واستخدمنا الكميات باعتبارها الأصل فى حساب رقم قياسى آخر واستخدمنا الأسعار على صورة معاملات للتـرجيح حصلنا على رقم قياسى للكميات يناظر رقم الأسعار ومحسوب بنفس الـصيغة. ويمكن اعتبار حاصل ضرب الرقمين صالحاً لقياس القيم ، أى يعتبـر حاصـل الضرب رقماً قياسياً للقيم.

ومعنى ذلك أنه إذا حسبنا الرقم القياسى لسلعة واحدة (منـسوب سـعر السلعة) ثم حسبنا الرقم القياسى لكميتها (منسوب الكمية) فمن البديهى أن يكون حاصل ضرب هذين الرقمين يساوى الرقم القياسى لقيمة هذه السلعة أو بعبارة أخرى فإننا نحصل على رقم نسميه منسوب القيمة وهو يساوى :

$$\frac{\text{قيمة السلعة فى سنة المقارنة}}{\text{قيمة السلعة فى السنة الأساس}}$$

وحيث أن هذا الاختبار بالنسبة لسلعة واحدة فيجب أن يكون كذلك بالنسبة لعـــدد من السلع.

فإذا قمنا بتركيب رقم قياسي للأسعار مرجحاً بالكميات ورقـــم قياســـى للكميات مرجحاً بالأسعار باستخدام نفس الصيغة فيجب أن يكون حاصل ضرب الرقمين هو

$$\frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_0} = \text{الرقم القياسى للقيمة}$$

والعملية السابقة تسمى عملية انعكاس للرقم فى المعامل وهى تـتلخص فى استبدال رموز الكميات برموز الأسعار وبالعكس فتحصل بذلك على البـــديل المعاملى للرقم. والرقم القياسى القابل للانعكاس فى المعامل هو الرقم الـــذى إذا ضرب فى بديله المعاملى لكان الناتج منسوب القيمة (الرقم القياسى للقيمة) أى

$$\frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_0}$$

ولتطبيق ذلك على صيغ الأرقام القياسية المختلفة نجد أن جميع صـــيغ الأرقام القياسية لا تحقق شرط الانعكاس فى المعامل باستثناء الـــرقم القياســـى الأمثل لفيشر الذى يحقق شرط الانعكاس فى المعامل علاوة على تحقيقه شـــرط الانعكاس فى الزمن.

فالرقم التجميعى البسيط = $\frac{\text{مجـ } س_1}{\text{مجـ } س_0}$ وبديله المعاملى $\frac{\text{مجـ } ك_1}{\text{مجـ } ك_0}$ وحاصل الضرب هو

$$\frac{\text{مجـ } س_1}{\text{مجـ } س_0} \times \frac{\text{مجـ } ك_1}{\text{مجـ } ك_0} \neq \frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_0}$$

وبناء على ذلك فإن هذا الرقم لا يحقق الانعكاس فى المعامل. والـرقم القياسى الأمثل لفيشر

$$= \sqrt{\frac{\text{مجـ س}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ س}_0\text{ك}_0} \times \frac{\text{مجـ س}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ س}_0\text{ك}_1}}$$

$$\text{وبديله المعاملى} = \sqrt{\frac{\text{مجـ ك}_1\text{س}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{س}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{س}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{س}_1}}$$

وحاصل الضرب=

$$\sqrt{\frac{\text{مجـ س}_1\text{ك}_0}{\text{مجـ س}_0\text{ك}_0} \times \frac{\text{مجـ س}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ س}_0\text{ك}_1} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{س}_0}{\text{مجـ ك}_0\text{س}_0} \times \frac{\text{مجـ ك}_1\text{س}_1}{\text{مجـ ك}_0\text{س}_1}} = \frac{\text{مجـ س}_1\text{ك}_1}{\text{مجـ س}_0\text{ك}_1}$$

وهو الرقم القياسى للقيمة. وهكذا نجد أن الرقم القياسى الأمثل لفيشر يحقق شرط الانعكاس فى المعامل.

(2-6) تعديل الأرقام القياسية

المقصود بتعديل الأرقام القياسية هو البحث عن الطريقة التى تؤدى إلى أن ينعكس الرقم القياسى فى الزمن أو فى المعامل.

(2-6-1) تعديل الرقم لينعكس فى الزمن

لإجراء تعديل الرقم القياسى لجعله ينعكس فى الزمن نضرب هذا الرقم فى مقلوب بديله الزمنى ثم يستخرج الجذر التربيعى لحاصل الضرب.

$$\text{ومقلوب البديل الزمنى} = \frac{1}{\text{البديل الزمنى}}$$

وبناء على ذلك فإن الرقم المعدل هو الوسط الهندسى للرقم الاصلى وبديله الزمنى. وحيث أن الرقم التجميعى المرجح بكميات المقارنة لا ينعكس فى الزمن ، فيمكن إجراء التعديل السابق حتى يحقق شرط الانعكاس فى الزمن كما يلى :

$$\text{الرقم التجميعى المرجح بكميات المقارنة} = \frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_1}$$

وبديله الزمنى هو

$$\frac{\text{مجـ } س_0 ك_0}{\text{مجـ } س_1 ك_0} \quad \text{ومقلوب بديله الزمنى هو} \quad \frac{\text{مجـ } س_1 ك_0}{\text{مجـ } س_0 ك_0}$$

الرقم المعدل هو

$$\sqrt{\frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_1} \times \frac{\text{مجـ } س_1 ك_0}{\text{مجـ } س_0 ك_0}}$$

ويلاحظ أن الرقم المعدل هو نفسه الرقم القياسى الأمثل الذى ينعكس فى الزمن. وبالمثل يمكن تعديل بقية الأرقام القياسية لجعلها تحقق شرط الانعكاس فى الزمن.

(2-6-2) تعديل الرقم لجعله ينعكس فى المعامل

ولإجراء هذا التعديل نضرب الرقم الأصلى فى مقلوب بديله المعاملى ثم نستخرج الجذر التربيعى لحاصل الضرب. وعلى ذلك يكون الرقم القياسى المعدل مساوياً للوسط الهندسى للرقم الأصلى ومقلوب بديله المعاملى. ومقلوب البديل المعاملى هو

$$\frac{\text{الرقم القياسي للقيمة}}{\text{البديل المعاملى}}$$

ولإيضاح طريقة التعديل نأخذ على سبيل المثل الرقم التجميعى المرجح بكميات المقارنة

$$= \frac{\text{مجـ } س_1 \, ك_1}{\text{مجـ } س_0 \, ك_1} \quad \text{وبديله المعاملى هو} \quad \frac{\text{مجـ } ك_1 \, س_1}{\text{مجـ } ك_0 \, س_1}$$

ومقلوب بديله المعاملى

$$= \frac{\text{مجـ } س_1 \, ك_1}{\text{مجـ } س_0 \, ك_0} \div \frac{\text{مجـ } ك_1 \, س_1}{\text{مجـ } ك_0 \, س_1} = \frac{\text{مجـ } س_1 \, ك_0}{\text{مجـ } س_0 \, ك_0}$$

$$\text{الرقم المعدل} = \sqrt{\frac{\text{مجـ } س_1 \, ك_1}{\text{مجـ } س_0 \, ك_1} \times \frac{\text{مجـ } س_1 \, ك_1}{\text{مجـ } س_0 \, ك_0}}$$

وهذا هو الرقم الأمثل لفيشر الذى ينعكس فى المعامل.

(2-7) بعض الأرقام القياسية الشائعة

الأرقام القياسية كما رأينا وسيلة لمتابعة التغييرات التى تطرأ على الظواهر لدراستها وتفهمها، وتستخدم فى كثير من الظواهر الاقتصادية والاجتماعية.

والأرقام القياسية الشائعة الاستخدام ، والتى تصدرها الكثير من الدول كثيرة ، منها الأرقام القياسية لنفقة المعيشة ، والأرقام القياسية للأجور والأرقام القياسية للإنتاج الصناعى والأرقام القياسية لأسعار الجملة وسنتناول بعض هذه الأرقام فيما يلى.

(2-7-1) الرقم القياسى لنفقة المعيشة أو لتكاليف المعيشة

هو مقياس يعبر عن التغيرات التى تطرا على النفقات اللازمة للمحافظة على مستوى معين للمعيشة لمجتمع معين.

وهنا يجب أن يلاحظ الفرق بين " نفقة المعيشة " و " مستوى المعيشة ". فمستوى المعيشة يقاس بكمية ما يستهلكه الفرد (أو المجتمع) من سلع وخدمات فترة محددة يصطلح على أنها سنة. ويمكن تقييم مستوى المعيشة لأى فرد أو مجتمع بالمقارنة بالمستوى المنشود ، وبذلك يمكن العمل على رفع مستويات المعيشة للمجتمعات بناء على تقييم كمى محدد.

أما نفقة المعيشة فهى عبارة عن التكلفة النقدية للحصول على السلع والخدمات التى يقبل الفرد أو المجتمع على الحصول عليها. وتتغير نفقة المعيشة بتغيير الأسعار. ويمكن تقسيم المتطلبات اللازمة للمعيشة من سلع وخدمات إلى مجموعات متجانسة بقدر الإمكان تسمى أوجه الإنفاق مثل : الطعام والشراب والمسكن والملابس والأمتعة والمستلزمات المنزلية والانتقال والمواصلات ونفقات التعليم والثقافة والعلاج والمصروفات النثرية. ثم نقسم كل مجموعة من هذه المجموعات إلى مجموعات فرعية أو أقسام.

وتعطى المجموعات أوزاناً تتناسب مع أهميتها ، وكذا تعطى الأقسام داخل المجموعات والسلع نتيجة بحوث ميزانية تجرى على المجتمع المراد تكوين رقم قياسى له. فمثلاً إذا أردنا تكوين رقم قياسى لنفقة المعيشة فى كل مكان من الحضر والريف غالباً ما تجرى مثل هذه البحوث بأسلوب العينة وتسمى مثل هذه البحوث ببحوث ميزانية الأسرة. فتجمع بيانات عما تنفقه أسر العينة على كل سلعة أو خدمة من السلع والخدمات المستهلكة لغرض المعيشة خلال فترة زمنية معينة. ويمكن بعد تبويب هذه البيانات الحصول منها على أهمية كل مجموعة من مجموعات الإنفاق بالنسبة للإنفاق الاستهلاكى الكلى ، وكذلك يمكن تحديد فى ضوء هذه البيانات السلع الهامة والخدمات المطلوبة. وتتخذ الفترة الزمنية التى تدرس خلالها أنماط المعيشة أساساً لتكوين الرقم القياسى لنفقة المعيشة.

مثال (2-14) :

جدول (2-14) يوضح الإنفاق الشهرى لعدد 300 أسرة تمثل صغار الموظفين فى المدن والأهمية النسبية لبنود الإنفاق فى عام 1970 في دولة ما. والمطلوب استخدامها فى حساب التغيير النسبى الذى طرأ على نفقات المعيشة فى يناير 1963 بالنسبة لفترة الأساس.

جدول (2-14)

بنود الإنفاق	متوسط الإنفاق الشهرى 1970	متوسط الإنفاق الشهرى 1993	الأهمية النسبية لبنود الإنفاق
الغذاء	5000	12000	50
الملابس	2000	4000	15
السكن	1500	3000	16
مصروفات أخرى	1500	2000	19

الحل:

الرقم القياسى لنفقة المعيشة = $\frac{\text{مجـ م س} \times \text{ق}}{\text{مجـ ق}}$

حيث م س = منسوب القيمة = $\frac{\text{متوسط الإنفاق فى سنة المقارنة}}{\text{متوسط الإنفاق فى سنة الأساس}} \times 100$

، حيث ق = الأهمية النسبية لبنود الإنفاق. ويوضح جدول (2-15) المطلوب

جدول (2-15)

م س × ق	ق = الأهمية النسبية لبنود الإنفاق	م س = $\frac{\text{إنفاق المقارنة}}{\text{إنفاق الأساس}}$ × 100
12000	50	غذاء $\frac{12000}{5000}$ × 100 = 240%
3000	15	ملابس $\frac{4000}{2000}$ × 100 = 200%
3200	16	مسكن $\frac{3000}{1500}$ × 100 = 200%
2532.7	19	غذاء $\frac{2000}{1500}$ × 100 = 133.3%
20732.7	100%	المجموع

الرقم = $\frac{\text{مجـ م س × ق}}{\text{مجـ ق}}$ = $\frac{20732.7}{100}$ = 207.327%

التغيير في نفقة المعيشة هو زيادة قدرها 107.3%

مثال (2-15):

إذا ارتفع مستوى الغذاء 20% ، والملابس 30% ، والسكن 40% ، والمصروفات الأخرى 10% ، وعلمت أن الأهمية النسبية لبنود الإنفاق كانت كالآتي:

50% للغذاء ، 20% للملابس ، 15% للسكن ، 15% للمصروفات الأخرى.

فما هو التغير الذى طرأ على نفقات المعيشة؟

الحل:

معنى ارتفاع مستوى الغذاء 20% أن منسوب الغذاء يزيد عن 100% بمقدار 20% أى أنه 120%. وبناء عليه فأن منسوب الملابس 130% والسكن 140% والمصروفات الأخرى 110% كما فى جدول (2-16).

جدول (2-16)

النوع	م س	ق	م س × ق
غذاء	120%	50	6000
ملابس	130%	20	2600
مسكن	140%	15	2100
مصروفات أخرى	110%	15	1650
المجموع		100	12350

وحيث أن نفقة المعيشة = $\frac{\text{مجـ م س × ق}}{\text{مجـ ق}} = \frac{12350}{100} = 123.5\%$

أى أن نفقة المعيشة زادت بنسبة 23.5%

(2-7-2) الرقم القياسى للأجور

يعتمد على توفر سلسلة من البيانات عن الأجور النقدية والعينية فى الأنشطة المختلفة وهى :

الزراعة والغابات وصيد البحر والبر – المناجم والمحاجر – الصناعات التحويلية والبناء – الكهرباء والغاز والمياه – التجارة والمال – النقل والمواصلات والتخزين وكذلك توافر بيانات عن أعداد المشتغلين فى هذه

الأنشطة ومتوسط ساعات اعمل المشتغل فى فترة الزمن التى يجمع عنها الأجر سواء كانت يوماً أو أسبوعاً أو شهراً.

وهذه البيانات يمكن أن تتوفر من المصادر التالية:

- إحصاءات الأجور وساعات العمل.
- إحصاءات الإنتاج الصناعى.
- بيانات التأمينات الاجتماعية.

وهنا يجب أن نفرق بين الأجر النقدى والأجر الحقيقى. فالأجر النقدى هو ما يتقاضاه الفرد مقابل قيامه بعمل معين أو بخدمة معينة. أما الأجر الحقيقى فهو انعكاس للقوة الشرائية للأجر النقدى ، أو هو كمية ما يستطيع الأجر النقدى شرائه من سلع وخدمات.

ويفيد الأجر الحقيقى فى التعرف على مستوى المعيشة السائدة كالآتى :

$$\text{الرقم القياسى للأجر الحقيقى} = \frac{\text{الرقم القياسى للأجر النقدى}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \times 100 \qquad (19-2)$$

فإذا كان الناتج أكبر من 100% فإن مستوى المعيشة يكون مرتفعاً بنسبة الزيادة. وإذا كان الناتج أقل من 100% فإن مستوى المعيشة يكون منخفضاً بنسبة النقص.

$$\therefore \text{الأجر الحقيقى} = \frac{\text{الأجر النقدى}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \qquad (20-2)$$

مثال (2-16):

يبين جدول (2-17) متوسط الأجر اليومى للعامل (بالجنيه) فى عدة صناعات فى سنتين في مدينة معينة: 1999 ، 1995 وكذلك عدد العمال المشتغلين بكل صناعة (بالألف) فى سنة 1995. والمطلوب : إيجاد الرقم

القياسي للأجور سنة 1999 بالنسبة إلى سنة 1995 كأساس باستخدام الطريقة التجميعية المرجحة.

جدول (2-17)

الصناعات	الأولى	الثانية	الثالثة	الرابعة
متوسط الأجر اليومي 1999	1.9	1.9	2.3	3.5
متوسط الأجر اليومي 1995	1.1	1.5	2.4	2.9
عدد العمال 1995	3.1	5.2	1.3	4.0

وإذا علمت أن الرقم القياسي لنفقة المعيشة (1999 / 1995) هو 252.6%

فهل ارتفع مستوى المعيشة أم انخفض؟ وبأية نسبة؟

الحل:

حيث أن المطلوب رقم قياسي للأجور باستخدام الطريقة التجميعية في سنة 1999 بالنسبة لسنة 1995 أي سنة الأساس ، فيستخدم رقم لاسبير (الرقم التجميعي المرجح بكميات سنة الأساس) كما في جدول (2-18)

جدول (2-18)

$س_1$ أجر سنة 1999	$س_0$ أجر سنة 1995	$ك_0$ عدد العمال سنة 1995	$س_1 ك_0$	$س_0 ك_0$
1.9	1.1	3.1	5.89	3.41
1.9	1.5	5.2	9.88	7.80
2.3	2.4	1.3	2.99	3.12
3.5	2.9	4.0	14.0	21.6
المجموع			32.76	25.93

وحيث أن رقم لاسبير = $\frac{مجـ س_1 ك_0}{مجـ س_0 ك_0} \times 100 = \frac{32.76}{25.93} \times 100 = 126.3\%$

∴ الرقم القياسي للأجور (1969/1965) = 126.3%. وحيث أن

رقم نفقة المعيشة (1965/1969) = 252.6% ، فإن الرقم القياسى

$$\text{للأجر الحقيقى} = \frac{\text{الرقم القياسى للأجر النقدى}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \times 100 = \frac{126.3}{252.6} = 50\%$$

نستنتج من ذلك أن مستوى المعيشة انخفض بنسبة 50%.

(2-7-3) الرقم القياسى لأسعار الجملة

وهذا الرقم يقيس التغيير فى أسعار السلع المتداولة فى أسواق الجملة ويفيد هذا الرقم فى قياس القوة الشرائية للنقود ، حيث أن القوة الشرائية للنقود وهى مقلوب الرقم القياسى لأسعار الجملة. ويتكون الرقم من الوسط الهندسى البسيط لمناسيب أسعار السلع.

مثال (2-17):

كون الرقم القياسى لأسعار الجملة للسلع الآتية في مدينة معينة باتخاذ متوسط الأسعار فى شهر يناير سنة 2000 كأساس كما فى جدول (2-19).

جدول (2-19)

القطن	أسعار يناير 2000	أسعار فبراير 2000
دندرة	15	15.2
أشموني	16	16.8
فيومي	18	17.6
جيزة (30)	20	20.8
القمح		
بلدى	5	6
زواتى	5.5	6
هندى	4.5	5
اللحوم		
عجالى	15	16
بلدى	17	18
ضانى	20	25
بتلو	18	20
سكر		
ناعم	10	12
ماكينة	9	10

الحل:

نوجد المناسيب لكل نوع من السلع: $\frac{\text{سعر فبراير 1961}}{\text{سعر يناير 1961}} \times 100$

كما هو موضح بجدول (2-20).

جدول (2-20)

القطن	المناسيب	اللحوم	المناسيب
دندرة	101.3	عجالى	106.7
أشمونى	105	بلدى	105.9
فيومى	97.8	ضانى	125
جيزة (30)	104.0	بتلو	111.1
القمح	المناسيب	سكر	المناسيب
بلدى	120	ناعم	120
زواتى	109.1	ماكينة	111.1
هندى	111.1		

∴ الرقم القياسى لأسعار الجملة = $\sqrt[ن]{\text{حاصل ضرب المناسيب}}$

$$= \sqrt[3]{111.1 \times 000 \times 105 \times 103.3}$$

∴ رقم أسعار الجملة = 109.6% ، القوة الشرائية للنقود = مقلوب الرقم القياسى للجملة = $\frac{1}{109.6} \times 100$

(4-7-2) الرقم القياسى للإنتاج الصناعى

يقصد به قياس التغيرات التى تطرأ على النشاط الصناعى من وقت لآخر للوقوف على الأحوال الاقتصادية للدولة فى هذا القطاع وتشخيص الموقف ووصف العلاج اللازم ، أو وضع الخطط الاقتصادية على هدى هذه التطورات.

ويفيد هذا الرقم فى متابعة التغيرات القصيرة الأجل فى حجم الإنتاج الصناعى للتعرف على مواطن الانتعاش أو الركود فى الصناعات المختلفة ، ثم ربط هذه التغيرات بالعوامل الاقتصادية المختلفة التى تؤثر على حجم الإنتاج. كما يعتبر الرقم القياسى للإنتاج الصناعى من المؤشرات الاقتصادية العامة التى يمكن أن يستدل منها المتخصصون على التغيرات فى مستوى النشاط والاقتصاد القومى عموماً أو التغييرات فى الدخل القومى وذلك استناداً على ارتباط مستوى النشاط فى القطاع الصناعى بمستوى النشاط فى القطاعات الأخرى.

ولتركيب رقم قياسى يلخص التغيير فى الإنتاج الصناعى ، يستخرج لكل فرع من فروع الصناعة رقم قياسى جزئى أو منسوب يقيس التغيير فى كمية الإنتاج فى هذه الصناعة فى سنة المقارنة النسبية لسنة الأساس ، ثم يركب رقم قياسى عام عبارة عن الوسط الحسابى المرجح للمناسيب. ويمكن أن

نستخدم كترجيحات قيمة صافى الإنتاج (القيمة المضافة) فى كل صناعة وذلك استناداً على أن أهمية الصناعة تقاس بمقدار ما تولده هذه الصناعة من دخل أو فائض يوزع على عوامل الإنتاج. ومن مميزات القيمة المضافة الاستقرار وعدم تأثرها إلى حد كبير بتغير أسعار المنتجات أو أسعار مستلزمات الإنتاج. وإذا لم تتوافر بيانات عن القيمة المضافة فيمكن أن نستخدم كترجيحات عدد المشتغلين فى كل صناعة. فكلما زاد عدد المشتغلين فى صناعة معينة كلما دل ذلك على أهمية هذه الصناعة فى عدد أكبر من السكان.

فإذا كان منسوب الصناعة أ = م س$_{أ}$ = $\dfrac{\text{كمية الإنتاج فى سنة المقارنة}}{\text{كمية الإنتاج فى سنة الأساس}} \times 100$

وكان منسوب الصناعة ب = م س$_{ب}$ ، ومنسوب الصناعة ج = م س$_{ج}$ ، والقيمة المضافة (أو صافى الإنتاج) = ق ، فإن الرقم القياسى للإنتاج الصناعى

$$= \frac{\text{م س}_{أ} \times \text{ق}_{أ} + \text{م س}_{ب} \times \text{ق}_{ب} + 0000 + \text{م س}_{ن}\,\text{ق}_{ن}}{\text{ق}_{1} + \text{ق}_{2} + 000 + \text{ق}_{ن}}$$

∴ الرقم القياسى للإنتاج الصناعى = $\dfrac{\text{مجـ م س} \times \text{ق}}{\text{مجـ ق}}$ (21-2)

، وهو عبارة عن الوسط الحسابى المرجح للمناسيب.

ويمكن تركيب هذا الرقم فى فترات قصيرة قد تكون شهرية أو ربع أو نصف سنوية وتجميع البيانات من بعض المصانع الهامة فى كل صناعة حيث أن تركيب هذا الرقم من كل الصناعات أمر غير عملى حيث يستلزم ذلك وقتاً طويلاً.

ولا ننسى أن الرقم القياسى للإنتاج الصناعى يمكن استخدامه فى معرفة الكفاية الإنتاجية للصناعة ممثلة فى الكفاية الإنتاجية للعمال وذلك بقسمة الرقم

القياسى للإنتاج على الرقم القياسى لرأس المال المستثمر. فإذا كان الناتج أكبر من الوحدة فى أى الحالتين دل ذلك على ارتفاع الكفاية الإنتاجية للعمال أو لرأس المال.

مثال (2-18):

أوجد الرقم القياسى للإنتاج الصناعى فى سنة 1973 بالنسبة لسنة 1986 كأساس باستخدام بيانات جدول (2-21)

جدول (2-21)

الصناعة	(1)	(2)	(3)	(4)
كمية الإنتاج سنة 1973	90	400	100	600
كمية الإنتاج سنة 1986	45	100	80	200
القيمة المضافة	6	4	10	5

وإذا علمت أن الرقم القياسى لعدد المشتغلين فى سنة 1973 بالنسبة لسنة 1986 كان 111% فما هى الكفاية الإنتاجية للعمال.

الحل:

الرقم المطلوب هو الوسط الحسابى المرجح للمناسيب وهو $\frac{\text{مجـ م س} \times \text{ق}}{\text{مجـ ق}}$

حيث م س = $\frac{ك_1}{ك_0} \times 100$ ، ق هى القيمة المضافة كما فى جدول (2-22).

جدول (2-22)

$م س = \frac{ك_1}{ك_0} \times 100$	ق = (القيمة المضافة)	م س × ق
$\frac{90}{45} \times 100 = 200\%$	6	1200
$\frac{400}{100} \times 100 = 400\%$	4	1600
$\frac{100}{80} \times 100 = 125\%$	10	1250
$\frac{600}{200} \times 100 = 300\%$	5	1500
المجموع	مجـ ق = 25	مجـ م س×ق= 5550

تمارين على الباب الثاني

تمرين (1):

إذا كان منسوب الكمية لسنة 1991 بأساس سنة 1982 هــو 105 ، كمــا أن منسوب الكمية لسنة 1991 بأساس سنة 1986 هو 140. ما هو منسوب الكمية لسنة 1986 بأساس سنة 1982.

تمرين (2):

الجدول التالى يبين أسعار بعض السلع فى سوق الجملة والمنتجات المباعة فى نهاية العام.

سعر الوحدة بالجنيه		كمية المباع بالطن	
1986	1987	1986	1987
24	36	10	12
36	20	6	18
22	35	15	32
15	12	20	10
18	23	11	25

احسب الأرقام القياسية التالية للأسعار والكميات (1986 = 100)

1- الرقم التجميعى البسيط.

2- الرقم التجميعى مرجحاً بكميات سنة الأساس (لاسبير).

3- الرقم التجميعى مرجحاً بكميات سنة المقارنة (باش).

4- الرقم الأمثل (فيشر).

5- الرقم مرجحاً بالوسط الحسابى لكميات سنتى الأساس والمقارنة.

6- الرقم مرجحاً بالوسط الهندسى لكميات سنتى الأساس والمقارنة.

الحل:

السعر: س الكمية : ك

$س_0$	$س_1$	$ك_0$	$ك_1$	$س_0 ك_0$	$س_0 ك_1$	$س_1 ك_0$	$س_1 ك_1$
24	36	10	12	240	288	360	432
36	20	6	18	216	648	120	360
22	35	15	32	330	704	525	1120
15	12	20	10	300	150	240	120
18	23	11	25	198	450	653	575
115	126	62	97	1284	2240	1498	2607

1- الرقم التجميعى البسيط للأسعار = $\frac{\text{مجـ } س_1}{\text{مجـ } س_0} \times 100$

$$= \frac{126}{115} \times 100 = 109.65\%$$

2- الرقم التجميعى البسيط للكميات = $\frac{\text{مجـ } ك_1}{\text{مجـ } ك_0} \times 100$

$$= \frac{97}{62} \times 100 = 156.45\%$$

3- الرقم التجميعى مرجحاً بكميات سنة الأساس = $\frac{\text{مجـ } س_1 ك_0}{\text{مجـ } س_0 ك_0} \times 100$

$$= \frac{1498}{1284} \times 100 = 116.7\%$$

4- الرقم التجميعى مرجحاً بكميات سنة المقارنة = $\frac{\text{مجـ } س_1 ك_1}{\text{مجـ } س_0 ك_1} \times 100$

$$= \frac{2607}{2240} \times 100 = 116.4\%$$

5- الرقم الأمثل = $\sqrt{116.7 \times 116.4} = 116.5\%$

$س_0$	$س_1$	$ك_0$	$ك_1$	$\frac{ك_0}{ك_1}$	$س_0(ك_0+ك_1)$	$س_1(ك_0+ك_1)$	$ك_0 ك_1$	$\sqrt{ك_0 ك_1}$	$س_0\sqrt{ك_0 ك_1}$	$س_1\sqrt{ك_0 ك_1}$
24	36	10	12	22	528	792	120	11	264	396
36	20	6	18	24	864	480	108	10.4	374.4	208
22	35	15	32	47	1034	1645	480	22	484	770
15	12	20	10	30	450	360	200	14	210	168
18	23	11	25	36	648	828	275	16.6	298.8	381.8
--	---	-	---	---	3524	4105	----	-------	1631.2	1923.8

6- الرقم مرجحاً بالوسط الحسابى لكميات سنتى الأساس والمقارنة

$$= \frac{س_1 (ك_0 + ك_1)}{س_0 (ك_0 + ك_1)} \times 100$$

$$= \frac{4105}{3524} \times 100 = 116.5$$

7- الرقم مرجحاً بالوسط الهندسى لكميات سنتى الأساس والمقارنة

$$= \frac{س_1 \sqrt{ك_0 ك_1}}{س_0 \sqrt{ك_0 ك_1}} \times 100$$

$$= \frac{1923.8}{1631.2} \times 100 = 117.9$$

تمرين (3) :

اثبت أن رقم لاسبير يساوى الرقم القياسى باستخدام الوسط الحسابى للمناسيب المرجح بالقيمة فى سنة الأساس.

تمرين (4) :

أ- اذكر كيف يمكن استخدام الرقم القياسى لنفقة المعيشة والرقم القياسى للجور فى قياس التغيير فى مستوى المعيشة؟

ب- أوجد الرقم القياسى للإنتاج الصناعى فى سنة 1993 بالنسبة لسنة 1988 كأساس باستخدام البيانات التالية :

الصناعة	(1)	(2)	(3)	(4)
كمية الإنتاج سنة 1993	90	400	100	600
كمية الإنتاج سنة 1988	45	100	80	200
القيمة المضافة 1988	6	4	10	5

وإذا علمت أن الرقم القياسى للإنتاج الصناعى سنة 1990 بالنسبة لسنة 1988 كأساس هو 120%. فما هى نسبة التغيير فى الإنتاج الصناعى لسنة 1993 بالنسبة إلى سنة 1990.

الحل:

أ- يمكن قياس التغيير فى مستوى المعيشة عن طريق استخدام الرقم القياسى للأجر الحقيقى حيث :

$$\text{الأجر الحقيقى} = \frac{\text{الرقم القياسى للأجور}}{\text{الرقم القياسى لنفقة المعيشة}} \times 100$$

فإذا كان الناتج أكبر من 100% فإن مستوى المعيشة يكون مرتفع بنسبة الزيادة. أما إذا كان الناتج أقل من 100% فإن مستوى المعيشة يكون منخفض بنسبة النقص.

$س_1$	$س_0$	$ك_0$	$س_1 ك_0$	$س_0 ك_0$
90	45	6	540	270
400	100	4	1600	400
100	80	10	1000	800
600	200	5	3000	1000
			6140	2470

الرقم القياسى للإنتاج الصناعى لسنة 1993 بأساس 1988

$$= \frac{\text{مجـ } س_1 ك_0}{\text{مجـ } س_0 ك_0} \times 100$$

$$= \frac{6140}{2470} \times 100 = 248.5\%$$

ولكن الرقم القياسى للإنتاج الصناعى لسنة 1990 بالنسبة لسنة 1988 كأساس = 120%

∴ الرقم القياسى للإنتاج الصناعى لسنة 1993 بأساس 1988

$$= \frac{248.5}{120} \times 100 = 207\%$$

∴ نسبة التغيير = 107%

تمرين (5) :

الجدول الآتى يوضح الأسعار بالجنيه والكميات بالآف الوحدات لثلاثة أنواع من السلع أ ، ب ، حـ عن عامى 1990 ، 1993 .

السلعـة	1990		1993	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	10	1	15	4
ب	20	2	25	5
حـ	25	3	50	6

والمطلوب:

حساب الأرقام القياسية الآتية لسنة 1993 بالنسبة لسنة 1990 كأساس.

أولاً : رقم لاسبير القياسى.

ثانياً : رقم باش القياسى.

ثالثاً : رقم فيشر الأمثل.

رابعاً : الرقم التجميعي للأسعار المرجح بمجموع كميات سنتى الأساس والمقارنة.

خامسا: الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار المرجح بالقيمة فى سنة الأساس.

سادساً: الوسط الحسابى لمناسيب الأسعار المرجح بالقيمة فى سنة المقارنة.

سابعاً : الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار المرجح بالقيمة فى سنة الأساس.

ثامناً : الوسط الهندسى لمناسيب الأسعار المرجح بالقيمة فى سنة المقارنة.

تاسعاً : الرقم القياسى للقيمة.

عاشراً: الرقم التجميعى للكميات المرجح بأسعار سنة الأساس.

حادى عشر : الرقم التجميعى للكميات المرجح بأسعار سنة المقارنة.

ثانى عشر : الرقم التجميعى للكميات المرجح بأسعار سنتى الأساس والمقارنة.

ثالث عشر : الرقم الأمثل لفيشر للكميات.

تمرين (6) :

والمطلوب:الى يمثل الأسعار بالجنيه وكميات الإنتاج لبعض السلع بالطن.

والمطلوب :

حساب الرقم القياسى التجميعى للأسعار لسنة 1994 باستخدام سنتى 1992 ، 1993 كأساس.

السلع	الكميات			الأسعار		
	1992	1993	1994	1992	1993	1994
أ	8	15	20	20	25	15
ب	5	7	14	10	15	40
حـ	2	4	8	25	30	35

الحل:

(6)

السلع	ك$_0$	ك$_1$	س$_0$	س$_1$	س$_0$ك$_0$	س$_1$ك$_0$
أ	11.5	20	22.5	15	258.5	172.5
ب	6	14	12.5	40	75	240
حـ	2	8	27.5	35	82.5	105
					416.25	517.5

∴ الرقم القياسى التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس

$$= \frac{\text{مجـ } س_1 ك_0}{\text{مجـ } س_0 ك_0} \times 100$$

$$= \frac{517.5}{416.25} \times 100 = 124.32\%$$

تمرين (7) :

الجدول الآتى يبين متوسط الأجور الأسبوعية بالقروش لأربع صناعات أ ، ب ، حـ ، د وعدد العمال فى كل منها بالنسبة لشهر يناير من سنتى 1993 ، 1994.

الصناعة	عدد العمال	متوسط الأجور الأسبوعية بالجنيهات	
		1993	1994
أ	8000	300	450
ب	4000	250	400
حـ	2000	240	350
د	1000	200	300

والمطلوب:

عمل رقم قياسى للأجور لسنة 1994 بالنسبة إلى سنة 1993 كأساس.

تمرين (8) :

الجدول التالى يبين أسعار إحدى السلع فى النصف الأول من عام 1980.

يناير	فبراير	مارس	ابريل	مايو	يونيو
90	85	80	95	75	70

المطلوب:

أ- احسب سلسلة الأرقام القياسية للسعر (المناسيب) باستخدام الأساس المتحرك.

ب- باستخدام الأساس الثابت (يناير =100).

حـ- استخدام المناسيب الثابتة السابقة فى نقل شهر الأساس إلى ابريل.

د- استخدام المناسيب المتحركة السابقة فى حساب المناسيب الثابتة بأساس ابريل (ابريل = 100)

الحل:

الشهر	السعر	متوسطات متحركة	م (يناير=100)	م (ابريل=100)
يناير	90	-	100	94.74
فبراير	85	94.40	94.4	89.4
مارس	80	94.10	88.88	84.2
ابريل	95	118.75	105.55	100
مايو	75	78.95	83.33	78.9
يونيو	70	93.30	77.77	73.68

أ- لحساب المناسيب المتحركة يقسم السعر فى أى شهر على السعر فى الشهر السابق له مباشرة.

ب- لحساب المناسيب الثابتة بأساس يناير يقسم سعر كل شهر على حدة على السعر فى شهر الأساس أى على السعر فى يناير.

حـ- لنقل شهر الأساس من يناير (فى المطلوب السابق) إلى شهر ابريل تقسم كل مناسيب الخطوة السابقة على منسوب شهر ابريل أى على 105.55 لنحصل على مناسيب بأساس ابريل.

د- لتحويل المناسيب المتحركة إلى مناسيب ثابتة بأساس ابريل يستخدم القانون التالى:

$$ق_{ن-1} = \frac{ق_{ن}}{م_{ن}} \times 100$$ وذلك للشهور السابقة على شهر ابريل

$$ق_{مارس} = \frac{ق_{ابريل}}{م_{ابريل}} \times 100 = \frac{100}{118.75} \times 100 = 84.2$$

$$ق_{فبراير} = \frac{ق_{مارس}}{م_{مارس}} \times 100 = \frac{84.2}{64.1} \times 100 = 89.5$$

$$ق_{يناير} = \frac{ق_{فبراير}}{م_{فبراير}} \times 100 = \frac{89.5}{94.4} \times 100 = 94.8$$

ويستخدم القانون التالى للفترات اللاحقة على سنة الأساس

$$ق = \frac{ق_{ابريل} \times م_{مايو}}{100} = \frac{78.95 \times 100}{100} = 78.95$$

$$ق = \frac{ق_{مايو} \times م_{يونيو}}{100} = \frac{93.3 \times 78.95}{100} = 73.66$$

ويمكن وضع هذه البيانات فى الجدول التالى :

الشهـــــر	السعـــــر	م. متحركـــــة	ق (ابريل=100)
ينـــايـــر	90	-	94.8
فبـــرايـــر	85	94.4	89.5
مـــــارس	80	94.1	84.3
ابريـــــل	95	118.75	100
مايـــــو	75	78.95	78.95
يونيـــــو	70	83.3	73.66

تمرين (9) :

الجدول التالى يبين متوسط الأجور الأسبوعية بالجنيهات لثلاث صناعات أ ، ب ، حـ وكذا جملة الأجور المدفوعة فى شهر مارس من سنتى 1994 ، 1995.

الصناعة	متوسط الأجور الأسبوعية		جملة الأجور المدفوعة بالآف
	1994	1995	الجنيهات سنة 1994
أ	8	10	12
ب	6	8	18
حـ	5	6	20

والمطلوب:

عمل رقم قياسى للأجور لسنة 1995 بالنسبة إلى سنة 1994 كأساس.

تمرين (10) :

الآتى بيان بالأرقام القياسية لنفقة المعيشة (1979 =100) والأرقام القياسـية للأجور (1992 = 100).

السنـــــة	2001	2002	2003	2004	2005
رقم نفقة المعيشة	306	297	299	310	356
رقم الأجور	104	110	112	116	120

والمطلوب:

المقارنة بين مستويات المعيشة خلال هذه السنوات بدءاً من سنة 2002.

الحل:

السنـــــة	2001	2002	2003	2004	2005
رقم نفقة المعيشة	306	297	2990	310	356
رقم الأجور	104	110	112	116	120
الأجر الحقيقى	33.98	37.04	37.46	37.42	33.7
التغير فى الأجر الحقيقى	66.02-	62.96-	62.54-	62.58-	66.3-

يلاحظ ما يلى :

1- انخفض مستوى المعيشة فى 2001 عن سنة الأساس بمقدار 66.02%.
2- انخفض مستوى المعيشة فى 2002 عن سنة الأساس بمقدار 62.96%.
3- انخفض مستوى المعيشة فى 2003 عن سنة الأساس بمقدار 62.54%.
4- انخفض مستوى المعيشة فى 2004 عن سنة الأساس بمقدار 62.58%.
5- انخفض مستوى المعيشة فى 2005 عن سنة الأساس بمقدار 66.3%.

تمرين (11) :

متسلسلة الأرقام القياسية التالية كونت بطريقة الأساس المتحرك (السلسلة).

والمطلوب:

تحويلها إلى متسلسلة أرقام قياسية بطريقة الأساس الثابت متخذاً 1976 سنة أساس.

السنـــة	1977	1978	1979	1980	1981
الرقم القياسى	105	85	98	112	110

تمرين (12) :

إذا كان الرقم القياسى للأجور فى إحدى المدن فى عام 1992 بالنسبة إلى عـــام 1982 هو 432 وكان الرقم القياسى لنفقة المعيشة فى عـــام 1982 هـــو 283 وفى عام 1992 هو 296 وذلك بالنسبة لعام 1969 = 100.

المطلوب:

احسب مدى التغيير الذى طرأ على مستوى معيشة هؤلاء العمال بـــين العامين المذكورين.

الحل:

الرقم القياسى لنفقة المعيشة فى عام 1992 بالنسبة إلى عام 1982

$$= \frac{296}{283} \times 100 = 104.6\%$$

وبما أن الرقم القياسى للأجور فى عام 1992 بالنسبة لعام 1982 = 432%

الرقم القياسى لمستوى المعيشة (الأجر الحقيقى) $= \frac{432}{104.6} \times 100 = 413\%$

مستوى المعيشة ارتفع فى عام 1992 بمعدل أربعة أمثال ما كان عليه فى عام 1982.

تمرين (13) :

متسلسلة الأرقام القياسية التالية كونت بطريقة الأساس الثابت.

والمطلوب:

تحويلها إلى متسلسلة أرقام قياسية بطريقة الأساس المتحرك.

السنة	1979	1980	1981	1982	1983
الرقم القياسى	100	108	111	121	155

تمرين (14) :

البيانات التالية تمثل إجمالى الأجور الشهرية وكذلك عدد العمال فى أربع مؤسسات فى عامى 1980 ، 1985.

المؤسسات	عدد العمال		إجمالى الأجور المدفوعة	
	1980	1985	1980	1985
أ	6	8	144	24
ب	12	13	384	294
حـ	4	7	164	315
د	5	6	135	210

أوجد الرقم القياسى لمتوسط أجر العامل فى عام 1985 متخذاً عام 1980 كأساس وإذا علمت أن الرقم القياسى لنفقة المعيشة فى عام 1967 هو 124 (1980= 100). ادرس التغيير الحقيقى فى مستوى معيشة هؤلاء العمال.

الحل:

الرقم القياسى لأجر العامل مرجحاً بعدد العمال سنة الأساس

$$= \frac{\text{مجـ } س_1ك_0}{\text{مجـ } س_0ك_0} \times 100$$

$$= \frac{5\times210 + 4\times315 + 12\times294 + 6\times24}{5\times135 + 4\times164 + 12\times384 + 6\times144} \times 100$$

$$= \frac{8382}{6802} \times 100 = 124 \text{ تقريباً}$$

أى أن مستوى معيشة العمال لم يتغير حيث أن الرقم القياسى لأجر العامل فـى عام 1985 بالنسبة إلى عام 1980 يساوى تقريباً الرقم القياسى لنفقة المعيشة عن نفس المدة.

الحل:

الرقم القياسى لأجر العامل مرجحاً بعدد العمال سنة الأساس

$$= \frac{\text{مجـ } س_1ك_0}{\text{مجـ } س_0ك_0} \times 100$$

$$= \frac{5\times210 + 4\times315 + 12\times294 + 60\times24}{5\times135 + 4\times164 + 12\times384 + 6\times144} \times 100$$

$$= \frac{8382}{6802} \times 100 = 124 \text{ تقريباً}$$

أى أن مستوى معيشة العمال لم يتغير حيث أن الرقم القياسى لأجر العامل فـى عام 1985 بالنسبة إلى عام 1980 يساوى تقريباً الرقم القياسى لنفقة المعيشة عن نفس المدة.

تمرين (15) :

انقل سنة الأساس لمتسلسلة الأرقام القياسية التالية إلى سنة 1985.

السنة	1983	1984	1985	1986	1987
الرقم القياسي	102	114	120	132	144

تمرين (16) :

الجدول التالى يمثل مناسيب الأسعار ومناسيب القيم لأحدى السلع فيما بين السنتين 1986 ، 1991 .

والمطلوب:

أ- إيجاد مناسيب الكميات باستخدام سنة 1986 كأساس.

ب- إيجاد مناسيب الكميات باستخدام سنة 1991 كأساس.

السنة	1986	1987	1988	1989	1990	1991
مناسيب الأسعار (100=1986)	100	102	104	106	106	110
مناسيب القيمة (100=1984)	112	120	124	130	136	156

تمرين (17) :

البيانات التالية توضح الإنفاق الشهرى لعدد 300 أسرة والأهمية النسبية لبنود الإنفاق فى عام 1980 .

والمطلوب:

استخدامها فى حساب التغيير النسبى الذى طرأ على نفقات المعيشة فى يناير 1990 بالنسبة لسنة الأساس.

البنـــــــود	متوسط الإنفاق الشهرى 1980	متوسط الإنفاق الشهرى 1990	الأهمية النسبية لبنود الإنفاق 1985
الغـــــــــذاء	500	1200	55
المــلابــــــس	200	400	15
السكـــــــــن	100	300	14
مصروفات أخــرى	300	500	16
المجموع	1100	2400	100

تمرين (18) :

أ- فرق بين مستوى المعيشة ونفقة المعيشة.

ب- الأرقام التالية تمثل الزيادة النسبية فـــى تكـــاليف البنـــود الرئيـــسية للمعيشة فى أحد المنـــاطق الـــصناعية ســـنة 1991 بالنـــسبة لسنة1980 كأساس وكذلك التوزيع النسبى لإنفـــاق الأســـرة فـــى المتوسط على هذه البنود.

بنود المعيشة	الغذاء	الملبس	المسكن	نفقات مختلفة
التوزيع النسبى للإنفاق	53	14	23	10
الزيادة النسبية فى تكاليف المعيشة	27	12	40	7

والمطلوب : حساب الرقم القياسى لنفقة المعيشة سنة 1991 بالنسبة لسنة 1980 كأساس.

تمرين (19) :

يبين الجدول التالى أسعار وكميات مجموعة من السلع فى سنتى 1980، 1984.

السنة	1980		1984	
	السعر	الكمية	السعر	الكمية
أ	8	50	12	60
ب	9	80	10	90
حـ	12	40	15	50

والمطلوب:

أ- إعداد الرقم القياسى لأسعار هذه المجموعة فى سنة 1984 باعتبار سنة 1980 سنة أساس وذلك بطريقة الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة الأساس.

ب- إعداد الرقم التجميعى المرجح بكميات سنة المقارنة.

حـ- إعداد الرقم الأمثل لفيشر.

تمرين (20) :

الجدول التالى يوضح جملة كسب العامل فى سنة 1988 وفى سنة 1987 فى بعض الصناعات.

الصناعة	جملة كسب العامل خلال عام 1988 بالجنيه	جملة كسب العامل عن شهر ابريل 1987 بالجنيه	جملة الأجور المدفوعة خلال 1988 بملايين الجنيهات
الغزل والنسيج	120	13	12
الاسمنت	96	8	3
الورق	90	9	0.5
الزجاج	80	7	0.8

فإذا علمت أن الرقم القياسى لنفقة المعيشة عن شهر ابريل كان 120% (1988=100) فهل ارتفع الأجر الحقيقى للعمال فى هذه الصناعة أم لا؟

تمرين (21) :

سلعة يتم تعبئتها للمستهلكين فى ثلاثة أحجام. وفيما يلى بيان بأسعار الوحدة من الأحجام الثلاثة والكميات المنتجة لسنتى 1985 ، 1990.

حجم العبوة	الإنتاج بالألف		الأسعار للوحدة	
	1985	1990	1985	1990
(1)	10	12	15	17
(2)	8	9	20	23
(3)	7	7	40	45

أوجد:

أ- الرقم القياسى التجميعى للأسعار.

ب- الرقم القياسى للأسعار بصيغة لاسبير.

حـ- الرقم القياسى الأمثل للأسعار.

د- الرقم القياسى الأمثل للكميات المنتجة ثم تحقق من توافر شروط الرقم القياسى الجيد فى كل حالة.

الجزء الثانى

الفصل الثالث: تحليل التباين

الفصل الرابع: الانحدار البسيط والارتباط البسيط

الفصل الخامس: مقدمة فى تحليل السلاسل الزمنية

أ.د. إبراهيم محمد مهدى

أ.د. فاطمة على عبد العاطى

تحليـــل التبايـــن

Analysis of Variance

ناقشنا فى مرحلة سابقة طرق الاستدلال الإحصائى عن متوسط المجتمع والفرق بين متوسطين ونسبة المجتمع والفرق بين نسبتين. وسنناقش فى هذا الفصل طرق الاستدلال الإحصائى للنسبة بين تباينين. والفرق بين ثلاث متوسطات أو أكثر.

وسندرس فى الجزء الأول من هذا الفصل طبيعة توزيع ف حيث سمى التوزيع بهذا الاسم تخليدا للعالم فيشر الذى يعتبر أول من أشتق هذا التوزيع ووصفه. ويستخدم توزيع ف أساسا لاختبار تساوى تباينى مجتمعين. ومن المثير للانتباه حقا ملاحظة أن اختبار تساوى التباين يستخدم لاختبار تساوى ثلاثة متوسطات أو أكثر بتحليل التباين.

فعادة ما نحتاج فى الحياة العملية لمقارنة أكثر من مجتمعين (مثل عدة طرق لتدريب ، عدة أنواع للأسمدة ، وهكذا) حيث من المعتاد أن تسمى الطرق المختلفة (التدريب ، الأسمدة) بالمعالجات. وتعتمد طريقة التحليل هنا بدرجة كبيرة على تصميم التجربة ونوع الفرض الذى نود اختباره ولنفرض المثال التالى:

بفرض أننا نريد مقارنة العدد المتوسط من الوحدات المنتجة يوميا بواسطة أربع آلات مختلفة (معالجات) ، وأن نفس العامل قد قام بتشغيل الآلات الأربع وذلك حتى نلغى الاختلافات التى قد تعود لطريقة تشغيل الآلات (أى تعود للعامل). وأيضا ، بفرض أننا نرغب فى الحصول على عدد ن من الوحدات التجريبية (المنتجة بواسطة الآلات الأربع) عشوائيا ، وأنه تم تخصيص ن١ من الوحدات

المنتجة بواسطة الآلة 1 (أى أن $ن_1$ من الوحدات قد تم إنتاجها بواسطة الآلة 1) ، $ن_2$ من الوحدات المنتجة بواسطة الآلة 2 ، $ن_3$ من الوحدات المنتجة بواسطة الآلة 3 ، $ن_4$ من الوحدات المنتجة بواسطة الآلة 4. فى هذه الحالة يتكون لدينا ما هو معروف باسم التصميم كامل العشوائية. ويعتمد تحليل التصميم كامل العشوائية على نوع الفروض التى نود وضعها حول المشاهدات ، فإذا فرضنا أن كل عينة من العينات الربع تأتى من مجتمع طبيعى له نفس التباين (المجهول)، فإنه يمكن تحليل البيانات بأسلوب تحليل التباين فى اتجاه واحد والذى يعد امتداد لاختبار ت لعينتين ويتضمن الأسلوب التحليل الإحصائى لتشتت متوسطات العينات المأخوذة من المجتمعات المطلوب دراستها.

توزيــــع ف F-Distribution

أفترض أن $س_1$، $س_2$ متغيران عشوائيان مستقلان يتبع كل منهما توزيعا معتدلا. إذا سحبت عينة مكونة من $ن_1$ من المفردات من مجتمع المتغير $س_1$ وحصلنا منها على $ع^2_1$ كتقدير غير متحيز لتباين المجتمع σ^2_1. وسحبت عينة أخرى مستقلة من $ن_2$ من المفردات من مجتمع المتغير $س_2$ وحصلنا منها على $ع^2_2$ كتقدير غير متحيز لتباين المجتمع σ^2_2 ، فإن النسبة $\frac{ع^2_1}{ع^2_2}$ ستتبع توزيع ف بدرجات حرية $(ن_1-1)$ فى البسط ، $(ن_2-1)$ فى المقام.

ويستخدم توزيع ف أساسا لاختبار تساوى تباينى مجتمعين. وفى هذه الحالة فإن إحصائية الاختبار ف تعرف كما يلى:

$$ف = \frac{ع^2_1}{ع^2_2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ويوجد الكثير من المواقف العملية التى تتطلب إجراء مثل هذا الاختبار. فمثلا ، قد يرغب أحد خبراء التعليم فى مقارنة طريقتين لتعليم القراءة فى المدارس الابتدائية: طريقة الصوت ، وطريقة الصورة. سُحبت مجموعتين من تلاميذ المرحلة الابتدائية بطريقة عشوائية حيث تعلمت مجموعة منها القراءة بإحدى الطريقتين وتعلمت المجموعة الأخرى بالطريقة الثانية. وفى النهاية أعطى للمجموعتين امتحانا موحدا فى القراءة ثم حسب درجات العينتين لاختبار فرض العدم القائل بأن مجتمعى درجات الاختبار لهما نفس التشتت.

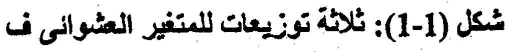
وعندما يكون تباينا العينتين متساويين ، فإننا بالطبع لا نرفض فرض العدم القائل بتساوى تباينى المجتمعين. وفى كثير من الأحيان تختلف قيمتى تباينا العينتين. فى هذه الحالة يساعدنا اختبار ف فى معرفة ما إذا كان الفرق بين تباينى العينتين راجعا للصدفة أم أنه فرق معنوى (عند مستوى معنوية α) بدرجة تكفى لرفض فرض العدم.

ولمعرفة طبيعة توزيع ف ، فإننا نتذكر أن توزيع ت يعتمد اعتمادا كاملا على معلمة واحدة فقط هى درجات الحرية. أما توزيع ف فإنه يعتمد على معلمتين: درجات حرية البسط م$_1$، ودرجات حرية المقام م$_2$. ويتحدد توزيع ف تحديدا كاملا بمعرفة قيمة كل من م$_1$، م$_2$. وترتبط معلمة المجتمع م$_1$ بالتباين الموجود فى بسط النسبة ف وهو ع$^2_1$ (مقدر النقطة الغير متحيز لتباين المجتمع الأول σ^2_1). وتحسب قيمة ع$^2_1$ باستخدام بيانات عينة عشوائية مكونة من ن$_1$ من المفردات من المجتمع الأول. وحيث أن درجات حرية مجموع مربعات انحرافات قيم العينة الأولى عن وسطها الحسابى هو (ن$_1$-1) فإن المعلمة م$_1$ تساوى (ن$_1$-1) ، أى أن م$_1$ هى درجات حرية ع$^2_1$ ، التباين الموجود فى بسط النسبة ف.

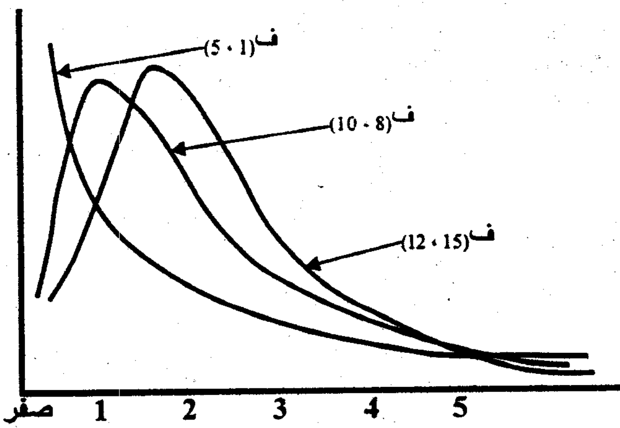
وبالمثل فإن المعلمة $م_2$ ترتبط بالتباين الموجود فى مقام النسبة ف وهو $ع_2^2$ (مقدر النقطة الغير متحيز لتباين المجتمع الثانى σ_2^2). وتحسب قيمة $ع_2^2$ باستخدام عينة عشوائية من $ن_2$ من المفردات من المجتمع الثانى. وحيث أن درجات حرية مجموع مربعات انحرافات قيم العينة الثانية عن وسطها الحسابى هو $(ن_2-1)$ فإن المعلمة $م_2$ تساوى $(ن_2-1)$. أى أن $م_2$ هى درجات حرية $ع_2^2$ ، التباين الموجود فى مقام النسبة ف. وبالتالى فإن توزيع ف يخلف باختلاف درجات حرية البسط $(ن_1-1)$ أو درجات حرية المقام $(ن_2-1)$ أو كليهما معا. فمثلا ، ترمز $ف_{(8، 10)}$ إلى توزيع ف بدرجات حرية بسط $م_1 = 8$ ودرجات حرية مقام $م_2 = 10$.

وتأخذ إحصائية الاختبار ف قيما غير سالبة لأن بسطها ومقامها يمثلان تبايني عينتين وقيمة أى منهما لا يمكن أن تكون سالبة. ومن الناحية النظرية فإن ف يمكن أن تأخذ أية قيمة بين الصفر ومالا نهاية. ومن الناحية العملية يمكن استخدام التباين الأكبر فى بسط النسبة ف والتباين الأصغر مقامها وبالتالى يعتبر الواحد الصحيح عمليا حداً أدنى لهذه النسبة.

ويعتمد شكل منحنى ف اعتمادا كاملا على كل من درجات حرية البسط $م_1$ ودرجات حرية المقام $م_2$. فإذا كانت درجات الحرية $م_1$، $م_2$ صغيرة فإن منحنى ف يكون ملتويا جهة اليمين. أما إذا زادت درجات حرية البسط أو المقام أو كليهما معا فإن شكل المنحنى يتجه إلى التماثل. ويوضح شكل (1-1) هذه الحقيقة.



شكل (1-1): ثلاثة توزيعات للمتغير العشوائى ف

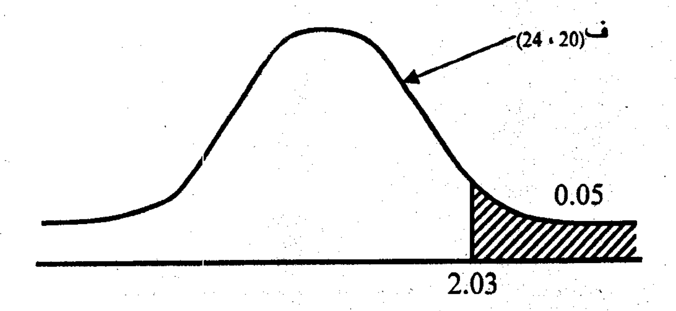


وحيث أن لتوزيع ف معلمتين م$_1$، م$_2$ فإن جدول ف يعتبر أكثر تعقيدا من جدول ت. وبالتالى يجب عرض جداول توزيع ف فى صورة أكثر تركيزا ، ويحتوى الصف العلوى فى جدول توزيع ف على درجات حرية البسط م$_1$ بينما يحتوى العمود الأول الموجود بأقصى يسار الجدول على درجات حرية المقام م$_2$. وتخصص كل صفحة من صفحات هذا الجدول لتقديم قيم ف الحرجة عند مستوى معنوية معين. لذا فإن جداول ف تعرض فقط قيم α الشائعة الاستخدام مثل 0.1 ، 0.05 ، 0.025 ، 0.01 حيث تخصص صفحة لكل قيمة من هذه القيم. ويستخدم الرمز ف(م$_1$، م$_2$، α) للإشارة إلى قيمة ف الحرجة المستخرجة من جداول توزيع ف بدرجات حرية بسط م$_1$ ودرجات حرية مقام م$_2$ بحيث تكون المساحة على يمين هذه القيمة مساوية α.

شكل (1-2)

توزيع ف بدرجات حرية بسط $م_1$=20 ودرجات حرية مقام $م_2$=24

مبينا قيمة ف التى تكون المساحة إلى مساوية 0.05



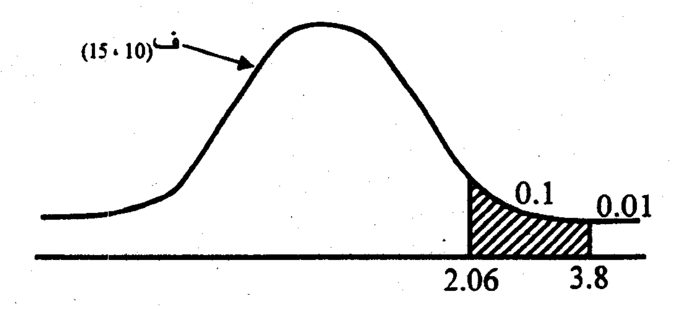
ويبين شكل (1-2) السابق توزيع ف بدرجات حرية بسط $م_1$=20 ودرجات حرية مقام $م_2$=24 وتمثل المساحة المظللة فى طرف الأيمن 5% من المساحة الكلية تحت المنحنى. وباستخدام جدول ف عند α=5% نجد أن قيمة ف الحرجة بدرجات حرية $م_1$=20 ، $م_2$=24 والتى تكون المساحة على يمينها مساوية 0.05 وهى 2.03. لاحظ أن هذه القيمة موجودة فى العمود $م_1$=20 وأمام الصف $م_2$=24 فى صفحة الجدول الخاص بقيمة α=0.05 ، أى أن $ف_{(24 ، 20 ، 0.05)}$= 2.03.

ويبين شكل (1-3) قيمتين من قيم ف الحرجة بدرجات حرية $م_1$= 10، $م_2$=15 بحيث أن المساحة على يمين إحداهما تمثل 10% من المساحة الكلية تحت المنحنى المناظر بينما تمثل المساحة على يمين الأخرى 1% من المساحة الكلية تحت نفس المنحنى.

ولقد أنشئت جداول ف بافتراض أن بسط النسبة ف أكبر من مقامها ، وبالتالى فإن قيم ف الموجودة فى الجدول أكبر من الواحد الصحيح. وبافتراض صحة فرض العدم القائل بتساوى تباين المجتمعين فإننا نتوقع تساوى تباين أية

عينتين مسحوبتين من هذين المجتمعين (عينة من كل مجتمع). وحتى إذا كان فرض العدم صحيحا فإن الطبيعة العشوائية للمعاينة تجعل اختلاف تباين العينتين أمرا واردا. وكلما زاد الفرق بين تبايني العينتين كلما زادت قيمة إحصائية الاختبار ف عن الواحد الصحيح ويرفض فرض العدم عندما تكون قيمة ف أكبر بدرجة كافية من 1.

شكل (3-1)
توزيع ف بدرجات حرية $م_1=10$ ، $م_2=15$ مبينا قيمتى ف الحرجتين حيث المساحة على يمين إحداهما 0.01 والمساحة على يمين الأخرى 0.1



اختبار النسبة بين تباينين

تستخدم النسبة ف المعرفة طبقا للمعادلة (1) لاختبار النسبة بين تبايني مجتمعين. ولقد طبق هذا الأسلوب فلا العديد من المشاكل التجارية والإدارية مثل مقارنة دقة وسيلة قياس معينة بدقة وسيلة قياس أخرى ، ومقارنة اتساق عملية إنتاج معينة باتساق عملية أخرى. وسنوضح فى هذا الجزء كيفية إجراء مثل هذه المقارنات.

من المعروف أنه عند سحب عينتين عشوائيتين مستقلتين من مجتمعين معتدلين مجهولين التباين فإن النسبة $\frac{ع_1^2}{ع_2^2}$ تتبع توزيع ف. وبافتراض صحة فرض العدم القائل بتساوى التباينين ($\sigma_1^2 = \sigma_2^2$) فإننا لا نتوقع أن تكون النسبة $\frac{ع_1^2}{ع_2^2}$ أكبر

من الواحد الصحيح بدرجة معنوية (بوضع التباين الأكبر فى بسط النسبة). فإذا لم تكن النسبة أكبر معنويا من 1 فإن هذا يدل على تساوى تباينى المجتمعين. أما إذا كانت النسبة أكبر من 1 بدرجة كافية فإن هذا يدل على وجود اختلاف حقيقى بين تباينى المجتمعين. ولكننا نتساءل عن مدى كبر النسبة ف حتى يمكننا رفض فرض العدم القائل بتساوى التباينين. إن الإجابة على هذا التساؤل تعتمد على قيمة ف الحرجة ، أى على كل من مستوى المعنوية α وعلى درجات الحرية $م_1$، $م_2$.

مثال (1)

افترض أننا نرغب فى معرفة ما إذا كان تشتت درجات القراءة باستخدام طريقة الصوت أكبر من تشتت الدرجات باستخدام طريقة الصورة. افترض أن المجتمع أ يتكون من درجات القراءة لجميع تلاميذ المرحلة الابتدائية الذين يتعلمون القراءة باستخدام طريقة الصوت وأن تباين هذا المجتمع هو σ_1^2. افترض أيضا أن درجات القراءة لجميع تلاميذ المرحلة الابتدائية الذين يتعلمون القراءة باستخدام طريقة الصورة تكون المجتمع ب وأن تباين هذا المجتمع هو σ_2^2. ينص فرض العدم بأن الطريقتين لهما نفس التأثير على تباين درجات القراءة ، أى أن $\sigma_1^2=\sigma_2^2$.

سحبت عينة عشوائية من 25 مفردة ($ن_1=25$) من المجتمع أ فكان تباينها $ع_1^2=40$ ، وسحبت عينة وسحبت عينة أخرى من 30 مفردة ($ن_2=30$) من المجتمع ب فوجد أن تباينها $ع_2^2=25$. إذا كانت $\alpha=0.05$، هل تؤدى هذه البيانات إلى قبول الفرض القائل بأن تباين درجات القراءة باستخدام طريقة الصوت أكبر تباين من درجات القراءة باستخدام طريقة الصورة؟

فى هذه الحالة يصاغ فرض العدم والبديل كما يلى:

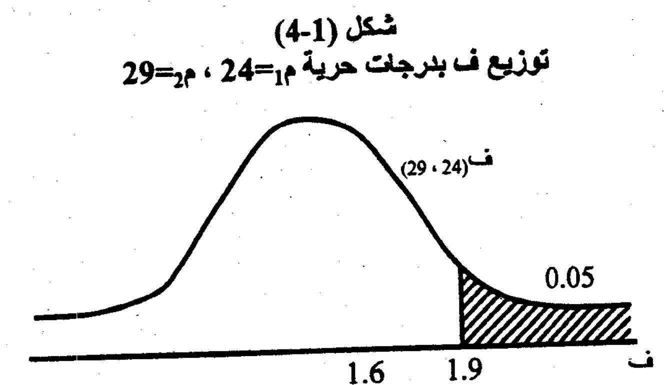
$ض_0: \sigma_1^2=\sigma_2^2$ $\qquad$ $ض_1: \sigma_1^2>\sigma_2^2$

وهذا بالطبع اختبار ذو طرف أيمن. باستخدام جدول ف عند $\alpha=0.05$ ، م$_1$=25-1=24 ، م$_2$=30-1=29 نجد أن قيمة ف الحرجة تساوى 1.9. لذا فإن قاعدة القرار هى:

رفض ض. عندما تكون $\frac{ع_1^2}{ع_2^2} \geq 1.9$ ،

حيث أن قيمة النسبة ف تساوى $\frac{40}{25}=1.6$ أقل من القيمة الحرجة فإننا نتبين أن تشتت درجات القراءة باستخدام طريقة الصوت ليس أكبر بدرجة كافية من تشتت درجات القراءة بطريقة الصورة عند $\alpha=0.05$. ويبين شكل (1-4) التالى المنطقة الحرجة.

شكل (1-4)
توزيع ف بدرجات حرية م$_1$=24 ، م$_2$=29



وهنا فإننا نتساءل عما يمكن استنتاجه إذا كان تباين العينة الأولى $ع_1^2$ أقل من تباين العينة الثانية $ع_2^2$. وبعبارة أخرى ماذا يمكن استنتاجه إذا كان تباين درجات القراءة باستخدام طريقة الصوت أقل من تباين درجات القراءة باستخدام طريقة الصورة ؛ فى مثل هذه الحالة فإننا نتوقف عن إجراء الاختبار لأن بيانات العينتين لا يمكن أن تؤدى إلى رفض فرض العدم.

وإذا كانت $ع_1^2$ أكبر من $ع_2^2$ فإننا نريد أن نعرف ما إذا كان هذا الفرق راجعا للصدفة أم أنه فرق معنوى يعكس موقفا حقيقيا. فى هذه الحالة نجد أن إحصائية الاختبار ف تساوى $\frac{ع_1^2}{ع_2^2}$.

وعند حساب تباينى عينتين مسحوبتين من مجتمعين لاختبار تساوى تباينى هذين المجتمعين ، فإن تباين العينة الأولى $ع_1^2$ قد يكون أكبر من أو أقل من أو يساوى تباين العينة الثانية $ع_2^2$. وهنا نتساءل: هل من الممكن أن يكون اختبار ف اختبار ذو طرفين؟ والإجابة على هذا السؤال بنعم. فإذا أردنا اختبار فرض العدم القائل بتساوى تباينى المجتمعين فى مقابل الفرض البديل القائل بعدم تساويهما (أى أن $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$) فإننا نقسم مستوى المعنوية α على 2 ونستخدم $\frac{\alpha}{2}$ كمستوى معنوية لإجراء اختبار ذو طرف أيمن. فإذا كان $ع_1^2$(تباين عينة من $ن_1$ من المفردات مسحوبة من مجتمع أ) أكبر من $ع_2^2$ (تباين عينة أخرى مستقلة من $ن_2$ من المفردات مسحوبة من مجتمع ب) فإن $م_1=(ن_1-1)$ ، $م_2=(ن_2-1)$ وتكون قاعدة القرار:

رفض ض. عندما تكون $\frac{ع_1^2}{ع_2^2} \geq ف_{(\frac{\alpha}{2}، م_1، م_2)}$

ومن الناحية الأخرى ، إذا كانت $ع_1^2$ أقل من $ع_2^2$ فإن إحصائية الاختبار تصبح $ف=\frac{ع_1^2}{ع_2^2}$ وتكون قاعدة القرار:

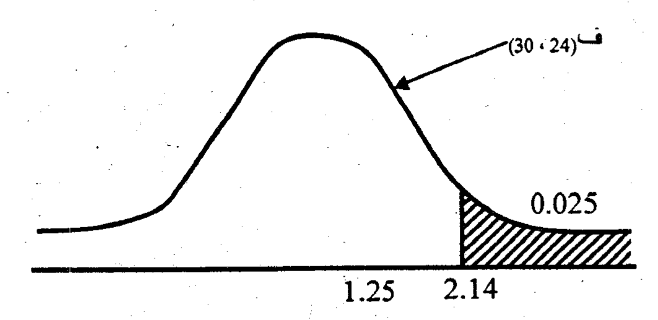
رفض ض. عندما تكون $\frac{ع_2^2}{ع_1^2} \geq ف_{(\frac{\alpha}{2}، م_2، م_1)}$

حيث تمثل $م_2$ هنا درجات حرية البسط الموجودة فى الصف العلوى من ملحق (و) بينما تمثل $م_1$ هنا درجات حرية المقام الموجودة فى العمود الأول من جهة اليسار بجدول ملحق (و).

مثال (2)

تستخدم ماكينتين أ ، ب لإنتاج نفس النوع من المسامير القلاووظ التى يجب أن يكون طولها ثلاث بوصات. افترض أن طول المسامير التى تنتجها الماكينتين تتبع توزيعات معتدلة. ونتيجة لبعض العوامل الفنية فإن أطول المسامير قد تختلف قليلا عن 3 بوصات. يعتقد البعض أن تشتت أطول المسامير التى تنتجها الماكينة أ (المجتمع أ) يختلف معنويا عن تشتت أطول المسامير التى تنتجها الماكينة ب (المجتمع ب). سحبت عينتين مستقلتين من 25 مسمار ، 31 مسمار من المجتمعين أ ، ب على التوالى فتبين أن $ع_1^2=0.05$ ، $ع_2^2=0.4$ ، اختبر الفرض القائل بتساوى تباينى المجتمعين مقابل الفرض البديل القائل بعدم تساويهما عند $\alpha=0.05$

شكل (1-5)
توزيع ف بدرجات حرية $م_1=24$ ، $م_2=30$



افترض أن σ_1^2 تمثل تباين المجتمع أ ، σ_2^2 تمثل تباين المجتمع ب. وبالتالى يكون فرض العدم والبديل كما يلى:

$ض_0: \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ $\qquad$ $ض_1: \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

وحيث أن هذا اختبار ذو طرفين فإننا نقسم مستوى المعنوية α على 2 ونستخدم $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.05}{2} = 0.025$ كمستوى معنوية لإجراء اختبار ذو طرف أيمن. وحيث أن التباين الأكبر $ع_1^2=0.5$ قد تم حسابه باستخدام 25 مفردة ، فإن $م_1=25-1=24$ كذلك فإن التباين الأصغر $ع_2^2$قد تم حسابه من 31 مفردة والتالى يكون $م_2=31-1=30$. وباستخدام جدول ف نجد أن قيمة ف الحرجة تساوى 2.14 ، أى أن

$ف_{(0.025 ، 24 ، 30)}=2.14$ لذا فإن قاعدة القرار هى:

رفض ض. عندما تكون $\frac{ع_1^2}{ع_2^2} \geq 2.14$

وحيث أن $\frac{ع_1^2}{ع_2^2} = \frac{0.5}{0.4} = 1.25$ أقل من القيمة الحرجة فإننا لا نرفض فرض العدم عند $\alpha=0.05$. ويبين الشكل (1-5) جزء المنطقة الحرجة الموجود فى الطرف الأيمن للتوزيع.

مثال (3)

افترض أننا نريد معرفة ما إذا كان تشتت أطوال العاملين يساوى تشتت أطوال العاملات. افترض أيضا أن σ_1^2 تمثل تباين أطوال العاملين (المجتمع أ) وأن σ_2^2

تمثل تباين أطوال العاملات (المجتمع ب) وأن الأطوال تتبع توزيعات معتدلة. سحبت عينتين مستقلتين من هذين المجتمعين. فإذا علمت أن العينة الأولى تتكون من 16 عاملا ($\sim_1=16$) وتباين أطوالها $ع_1^2 = 200$ وأن العينة الثانية تتكون من 25 عاملة ($\sim_2=25$) وتباين أطوالها $ع_2^2 = 600$. اختبر الفرض القائل بعدم تساوى تباينى المجتمعين عند $\alpha=0.05$.

نجد فى هذا المثال أن فرض العدم والفرض البديل هما:

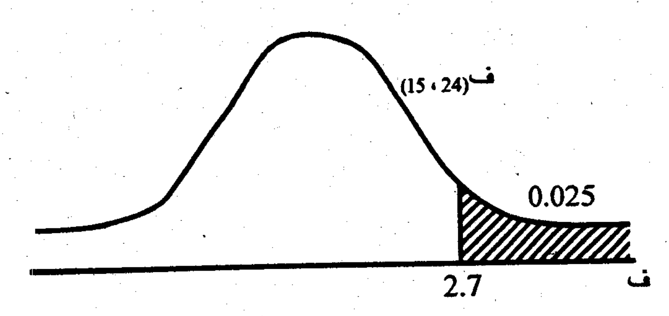
ض.: $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ ض₁: $\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$

وحيث أن الاختبار ذو طرفين فإننا نقسم مستوى المعنوية على 2. وهنا فإن درجات حرية التباين الأكبر $ع_2^2$ هى $م_2=ن_2-1=25-1=24$. كذلك فإن درجات حرية التباين الأصغر $ع_1^2$ هى $م_1=ن_1-1=16-1=15$. وبالتالى نجد أن قيمة ف الحرجة هى $ف_{(0.025 ، 24 ، 15)}=2.7$. لذا فإن قاعدة القرار هى:

رفض ض. عندما تكون $\frac{ع_2^2}{ع_1^2} \geq 2.7$

وحيث أن $\frac{ع_2^2}{ع_1^2} = \frac{600}{200} = 3$ أكبر من قيمة ف الحرجة فإننا نرفض فرض العدم عند مستوى معنوية 0.05 ويبين شكل (6-1) جزء المنطقة الحرجة الموجودة فى طرف المنحنى الأيمن.

شكل (6-1)
توزيع ف بدرجات حرية $م_1=24$ ، $م_2=15$



ويوضح هذا المثال كيفية إجراء اختبار ذو طرفين باستخدام اختبار ذى طرف أيمن. ولقد تم هذا بوضع تباين العينة الأكبر فى بسط إحصائية الاختبار ف واستخدام $م_1$ لتمثل درجات حرية التباين الأكبر ، $م_2$ لتمثل درجات حرية التباين الأصغر عند استخراج القيمة الحرجة من جداول ف بعد قسمة مستوى المعنوية α على 2.

تحليل التباين فى اتجاه واحد One-Way Analysis of Variance

إن المناقشة التى تمت فيما سبق جعلت من الممكن دراسة نوع آخر من المشاكل ألا وهو معرفة ما إذا كانت الفروق المشاهدة بين متوسطات ثلاث عينات أو أكثر تعكس فروقا حقيقية بين متوسطات المجتمعات التى سحبت منها هذه العينات أم أنها فروق راجعة للصدفة فقط. فمثلا قد يرغب خبير زراعى فى معرفة ما إذا كان هناك فرق معنوى فى متوسط إنتاجية فدان فول الصويا الناتج من استخدام ثلاثة أنواع مختلفة من الأسمدة لتسميد قطع أرض زراعية متماثلة. كذلك قد يرغب أحد الباحثين فى معرفة ما إذا كان هناك فرق معنوى فى معدل استهلاك الوقود لأنواع مختلفة من السيارات. أيضا قد نرغب فى معرفة ما إذا كان هناك فرق معنوى بين متوسطات أعمار أنواع مختلفة من المصابيح الكهربائية. وقد يرغب أحد خبراء التعليم فى مقارنة كفاءة طرق عديدة لتعليم القراءة لأطفال المرحلة الابتدائية.

ولقد استخدم اختبار ت لمعرفة ما إذا كان الفرق المشاهد بين متوسطى عينتين يمكن إرجاعه للصدفة أم انه يعكس فرقا حقيقيا بين متوسطى المجتمعين اللذين سحبت منهما العينتان. وعند وجود أكثر من عينتين يكون استخدام اختبار ت نادرا. ويرجع السبب فى ذلك إلى أن استخدام اختبار ت يصبح غير عملى عندما يكون عدد العينات كبيرا. ولتوضيح ذلك دعنا نفترض أن مشكلة معينة تتطلب سحب خمس عينات متوسطاتها $\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_2$ ، $\bar{س}_3$ ، $\bar{س}_4$ ، $\bar{س}_5$ ودراسة الفروق بين متوسطات المجتمعات المسحوبة منها هذه العينات يتطلب إجراء عشرة اختبارات باستخدام ت لمقارنة عشر من أزواج متوسطات العينات وهى:

$\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_2$ $\bar{س}_2$ ، $\bar{س}_3$ $\bar{س}_3$ ، $\bar{س}_4$ $\bar{س}_4$ ، $\bar{س}_5$

$\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_3$ $\bar{س}_2$ ، $\bar{س}_4$ $\bar{س}_3$ ، $\bar{س}_5$

$\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_4$ $\bar{س}_2$ ، $\bar{س}_5$

$\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_5$

وعندما يزداد عدد العينات فإن ذلك يؤدى إلى زيادة عدد اختبارات ت المطلوب تنفيذها. فمثلا وجود 6 عينات يتطلب إجراء 15 اختبارا.

أضف إلى ذلك أن استخدام توزيع ت لمقارنة العديد من أزواج المتوسطات (مثل أزواج المتوسطات السابقة) يؤدى عادة إلى إظهار فروق معنوية بين بعض أزواج متوسطات العينات على الرغم من أن هذه الفروق قد لا تكون حقيقية. لذا فإنه عند مقارنة متوسطات ثلاث عينات أو أكثر ، يصبح استخدام اختبار ت لإجراء هذه المقارنات غير ملائم ويصبح من الضرورى استخدام أسلوب آخر لاختبار الفرض القائل بأن هذه العينات مسحوبة من مجتمعات لها نفس المتوسط (μ). ويعرف هذا الأسلوب بأسلوب تحليل التباين.

ويستخدم أسلوب تحليل التباين لمقارنة متوسطات عدة مجتمعات فى العديد من البحوث مثل مقارنة متوسطات إنتاج عدة أصناف من محصول معين ، مقارنة متوسطات عدد الأيام اللازمة للشفاء من مرض معين لعدة أنواع من الأدوية ، مقارنة عدة طرق من طرق التدريس ، مقارنة عدة طرق لإنتاج سلعة معينة. وفيما يلى شرحا موجزا لهذا الأسلوب.

بفرض أن لدينا ثلاث عينات (معالجات)

المعالجات	المشـــــــــاهدات			
(1)	$\bar{س}_{11}$	$\bar{س}_{21}$	$\bar{س}_{31}$	$\bar{س}_{41}$
(2)	$\bar{س}_{12}$	$\bar{س}_{22}$	$\bar{س}_{32}$	$\bar{س}_{42}$
(3)	$\bar{س}_{13}$	$\bar{س}_{23}$	$\bar{س}_{33}$	$\bar{س}_{43}$

ولإجراء تحليل التباين نتبع الخطوات التالية:

أولا: إيجاد المجاميع التالية (بفرض تساوى عدد المعالجات فى كل معالجة):

م	المشاهدات				مجـ س	(مجـ س)^2	مجـ س^2
(1)	$س_{11}$	$س_{21}$	$س_{31}$	$س_{41}$	××	××	××
(2)	$س_{12}$	$س_{22}$	$س_{32}$	$س_{42}$	××	××	××
(3)	$س_{13}$	$س_{23}$	$س_{33}$	$س_{43}$	××	××	××
					مجـ مجـ س	مجـ (مجـ س)^2	مجـ مجـ س^2

ثانيا: إيجاد مجموع المربعات:

- مجموع المربعات الكلى: (م . م . ك)

$$= \text{مجـ مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{ن}$$

حيث ن=عدد المفردات الكلية لجميع العينات.

- مجموع المربعات بين المعالجات: (م . م . ب)

$$= \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{ن_م} - \frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{م - 1}$$

حيث $ن_م$ = عدد المفردات فى المعالجة الواحدة.

- مجموع مربعات داخل المعالجات (مجموع مربعات الخطأ العشوائى)

(م . م . د) = م . م . خ

= مجموع المربعات الكلى- مجموع المربعات بين المعالجات

ثالثا : متوسط المربعات:

- متوسط المربعات بين المعالجات ($ع^2_ب$) = التباين بين المعالجات

$$(ع^2_ب) = \frac{\text{مجموع المربعات بين المعالجات}}{\text{عدد المعالجات - 1}} \quad \frac{\text{مجموع المربعات بين المعالجات}}{م - 1}$$

وتسمى (م – 1) بدرجات حرية المعالجات

- متوسط مربعات داخل المعالجات ($ع^2_خ$)= وهو أحيانا يسمى متوسط مربعات الخطأ = تباين الخطأ العشوائى

$$(ع^2_خ) = \frac{\text{مجموع المربعات بين المعالجات}}{ن - م}$$

ويسمى (ن – م) بدرجات حرية داخل المعالجات أو درجات حرية الخطأ العشوائى

رابعا: تحتسب نسبة التباين (ف المحسوبة):

$$ف = \frac{(ع^2_ب)}{(ع^2_خ)}$$

خامسا: اختبارات الفروض:

الفرض العدمى أو فرض التساوى (ض.) = $\mu_1=\mu_2=\mu_3$

الفرض البديل ($ض_1$): يوجد اثنين على الأقل من المتوسطات μ_1 μ_2 μ_3 غير متساوين.

ف الجدولية بمستوى معنوية 0.05 ، 0.01 بدرجات حرية: (م - 1) ، (ن - م)

وذلك من خلال جدول ف

$$ف_{المحسوبة} \quad \frac{(ع^2_ب)}{(ع^2_خ)}$$

المقارنة والاستنتاج والقرار: إذا كانت ف المحسوبة أكبر من ف الجدولية نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل والعكس صحيح.

سادسا جدول تحليل التباين:

مصدر التباين	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	م – 1	مجموع المربعات بين المعالجات	$ع^2_ب$	$\frac{ع^2_ب}{ع^2_خ}$
داخل المعالجات	ن – م	مجموع المربعات داخل المعالجات	$ع^2_خ$	
الكلى	ن – 1	مجموع المربعات الكلى	———	———

مثال (4)

- إذا كان عدد الوحدات التجريبية متساوية فى كل معالجة

استخدمت ثلاث أنواع من الأدوية (فيتامينات) لثلاث عينات متشابهة من المرضى وكانت درجة الإصابة كما يلى:

العينة الأولى	8	7.5	7	5.5
العينة الثانية	9	10	8	9
العينة الثالثة	6	5	5.5	3.5

اختبر ما إذا كان هنا فروق معنوى بين متوسطات هذه الأدوية عند مستوى معنوية 0.05

م	المشاهدات (القيم (س))				مجـ س	(مجـ س)^2	مجـ س^2
(1)	8	7.5	7.0	5.5	28	784	199.5
(2)	9	10.0	8.0	9.0	36	1296	326.0
(3)	6	5.0	5.5	3.5	20	400	103.5
					84	2480	629.0
					مجـ مجـ س	مجـ (مجـ س)^2	مجـ مجـ س^2

(م .م . ك) = مجـ مجـ س^2 - $\frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{\text{ن}}$

$$= 629 - \frac{84 \times 84}{12}$$

$$= 629 - 588 = 41$$

- مجموع المربعات بين المعالجات (م . م . ب)

$$= \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{م}} - \frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

$$= \frac{2480}{40} - \frac{84 \times 84}{12}$$

$$= 620 - 588 = 32$$

- مجـ المربعات داخل المعالجات (م . م . د)

= م . م . ك – م . م . ب

= 41 – 32 = 9

$$ع^2_ب = \frac{م.م.ب}{م - 1} = \frac{32}{3 - 1} = 16$$

$$ع^2_خ = \frac{م.م.خ}{م - 1} = \frac{9}{12 - 3} = 1$$

$$ف_{المحسوبة} = \frac{ع^2_ب}{ع^2_خ} = \frac{16}{1} = 16$$

جدول تحليل التباين

المصدر	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	2	32	16	1/16
داخل المعالجات	9	9	1	16 =
الكلى	11	41	–	

الفرض العدمى (ض.): $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل (ض$_1$): يوجد اثنين على الأقل من المتوسطات μ_1 μ_2 μ_3 غير متساويين.

ف$_{الجدولية}$ بدرجات حرية 2 ، 9 وبمستوى معنوية 0.05 = 4.26

ف$_{المحسوبة}$ = 16

المقارنة والاستنتاج والقرار: ف$_{المحسوبة}$ (16) أكبر من ف$_{الجدولية}$ (4.26)

∴ يرفض فرض العدم ض. أى أنه يوجد فرق بين متوسطات الأدوية عند مستوى معنوية 0.05

مثال (5)

- إذا كان لدينا عدد من الوحدات التجريبية غير متساو فى المعالجات

بفرض أن لدينا أربعة من الفئران (مستقلة) أعطيت لكل مجموعة نوع معين من الفيتامينات وقيست الزيادة فى الوزن فى كل مجموعة وكانت النتائج كالتالى :

(أ)	(ب)	(ج)	(د)
2	11	صفر	10
10	10	3	10
8	12	صفر	
صفر		5	

حيث أن أ ، ب ، ج ، د تمثل أسم الفيتامين الذى أعطى لكل مجموعة

اختبر هل هناك فرق معنوى بين الفيتامينات المختلفة أم لا بمستوى معنوية 5% ؟

م	المشاهدات		القيم (س)		مجـ س	$(\text{مجـ س})^2$	مجـ س^2
(1)	2	10	8	صفر	20	400	168
(2)	11	10	12	5	33	1089	365
(3)	صفر	3	صفر		8	64	34
(4)	10	10			20	400	200
					81	—	767

$$\text{م . م . ك} = 767 - \frac{81\times81}{13} = 262.31$$

$$\text{م . م . ب} = \left(\frac{400}{2}+\frac{64}{4}+\frac{1089}{3}+\frac{400}{4}\right) - \frac{81\times81}{13} = 174.31$$

$$\text{م . م . د} = 262.31 - 174.31 = 88$$

$$ع^2_ب = \frac{174.31}{3} = 58.1$$

$$ع^2_خ = \frac{88}{9} = 9.8$$

$$ف_{المحسوبة} = \frac{ع^2_ب}{ع^2_خ} = \frac{58.1}{9.8} = 5.9$$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	174.31	3	58.1	5.9
داخل المعالجات	88.00	9	9.8	
الكلى	262.31	12		

(ضْ.) الفرض العدمى: $\mu_1=\mu_2=\mu_3=\mu_4$

(ض1) الفرض البديل: يوجد اثنان علىّ الأقل من المتوسطات μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 غير متساوية.

ف الجدولية بدرجات حرية 3 ، 9 وبمستوى 0.05 (جدول ف) = 3.86

ف المحسوبة = 5.9

المقارنة والاستنتاج والقرار: ف المحسوبة > ف الجدولية نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل أى أن هناك فروق معنوية بين الفيتامينات المختلفة.

ملحوظة هامة:

أولا: يمكن إيجاد مجموع المربعات والتباين بطريقة أخرى على النحو التالى:

<u>إيجاد مجـ المربعات والتباين:</u>

(1) مجـ المربعات بين المعالجات:

$$= \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{م}} - \frac{\text{(مجـ مجـ س)}^2}{\text{ن}} = \text{(م . م . ب)}$$

(2) مجـ مربعات داخل المعالجات (مجـ مربعات الخطأ العشوائى)

$$= \text{مجـ مجـ س}^2 - \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{نم}} = \text{(م . م . د)}$$

(3) تباين المعالجات: $(\text{ع}^2_{\text{ب}}) = \frac{\text{م.م.ب}}{\text{م} - 1}$

(4) تباين داخل المعالجات: $(\text{ع}^2_{\text{خ}}) = \frac{\text{م . م . د}}{\text{ن} - 1}$

جدول تحليل التباين

مصدر الاختلاف	درجات الحرية	مجـ المربعات	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	م − 1	م . م . ب	$\text{ع}^2_{\text{ب}} = \frac{\text{م.م.ب}}{\text{م} - 1}$	$\frac{\text{ع}^2\text{ب}}{\text{ع}^2\text{خ}}$
داخل المعالجات	ن - م	م . م . د	$\text{ع}^2_{\text{خ}} = \frac{\text{م.م.د}}{\text{ن} - \text{م}}$	
الكلى	ن - 1	م . م . ك	ــــ	ــــ

اختبارات الفروض الإحصائية:

الفرض العدمى: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = ... = \mu_{\text{م}}$

الفرض البديل: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq .... \neq \mu_{\text{م}}$.

ف$_{\text{الجدولية}}$ بمستوى معنوية 0.05 بدرجات حرية: (م − 1) البسط ، (ن − م) المقام.

$ف_{المحسوبة}$: من جدول تحليل التباين.

المقارنة والاستنتاج والقرار: $ف_{المحسوبة} > ف_{الجدولية}$ نرفض العدمى.

$ف_{المحسوبة} < ف_{الجدولية}$ نقبل العدمى .

وبحل المثال الرابع بهذه الطريقة:

م	المشاهدات (س)				مجـ س	مجـ س^2
1	8	7.5	7	5.5	28	199.5
2	9	10	8	9	36	326
3	6	5	5.5	3.5	20	103.5
					84	629
					مجـ مجـ س	مجـ مجـ س^2

$$(م . م . ب) = \frac{مجـ (مجـ س)^2}{م \sim} - \frac{(مجـ مجـ س)^2}{ن}$$

$$= \frac{(28)^2}{4} + \frac{(36)^2}{4} + \frac{(10)^2}{4} - \frac{84x84}{12} = 620 - 588 = 32$$

$$(م . م . د) = مجـ مجـ س^2 - \frac{مجـ (مجـ س)^2}{م \sim}$$

$$= 629 - 620 = 9$$

$$ع^2_{ب} = \frac{م . م . ب}{م - 1} = \frac{32}{3 - 1} = 16$$

$$ع^2_خ = \frac{م . م . د}{ن - م} = \frac{9}{12-3} = 1$$

$$ف_{المسحوبة} = \frac{ع^2_ب}{ع^2_خ} = \frac{16}{1} = 16$$

المصدر	درجات الحرية	مجموع المربعات	متوسطات المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	2	32	16	1/16
داخل المعالجات	9	9	1	16 =
الكلي	11	41		

الفرض العدمى: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

$ف_{الجدولية}$ بدرجات حرية 2 ، 9 وبمستوى 0.05 = 4.26

$ف_{المسحوبة}$ = 16

المقارنة والاستنتاج والقرار: $ف_{المحسوبة}$ (16) أكبر من $ف_{الجدولية}$ (4.26)

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل البديل أى أنة يوجد فرق بين متوسطات المعالجات عند مستوى معنوية 5%

وبحل المثال (5) بهذه الطريقة

م	المشاهدات		القيم (س)		مجـ س	مجـ س^2
(1)	2	10	8	صفر	20	168
(2)	11	10	12	5	33	365
(3)	صفر	3	صفر		8	34
(4)	10	10			20	200
					81	767

(م . م . ب) $= \frac{{}^{2}(\quad)}{4} + \frac{{}^{2}(33)}{3} + \frac{{}^{2}(8)}{4} + \frac{{}^{2}(20)}{2} - \frac{81\times 81}{13}$

$= 504.7 - 200 + 16 + 363 + 100$

$= 174.31 = 504.7 - 679$

(م . م . د) $= 88 = 679 - 767$

$ع^2_ب = \frac{174.31}{3} = 58.1$

$ع^2_خ = \frac{88}{9} = 9.8$

$ف_{المسحوبة} = \frac{ع^2_ب}{ع^2_خ} = \frac{58.1}{9.8} = 5.9$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	174.31	3	58.1	5.9
داخل المعالجات	88.00	9	9.8	
الكلى	262.31	12		

الفرض العدمى: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

الفرض البديل: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$

$ف_{الجدولية}$ بدرجات حرية 3 ، 9 ، 0.05 = 3.86

$ف_{المحسوبة}$ = 5.9

المقارنة والاستنتاج والقرار: $ف_{المحسوبة} > ف_{الجدولية}$ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل أى أن هناك فروق معنوية بين الفيتامينات المختلفة.

ثانيا: إذا كانت البيانات معطاة على النحو التالى:

- **حجم العينة فى كل معالجة:** $ن_1$ ، $ن_2$ ، $ن_3$ ، ...
- **الوسط الحسابى لكل معالجة:** $\bar{س}_1$ ، $\bar{س}_2$ ، $\bar{س}_3$ ، ...
- **الانحراف المعيارى لكل معالجة:** $ع_1$ ، $ع_2$ ، $ع_3$ ، ...

فإن مجموع المربعات سيكون على النحو التالى:

مجموع المربعات بين المعالجات (م . م . ب) = مجـ ن $(\bar{س} - \bar{\bar{س}})^2$

حيث ن حجم العينة فى المعالجة الواحدة ، $\bar{س}$ الوسط الحسابى للمعالجة (الواحدة)

$\bar{\bar{س}}$ = المتوسط العام لمتوسطات المعالجات.

مجموع المربعات داخل المعالجات (م . م . د) = مجـ مربعات الخطأ العشوائى

= مجـ (ن -1)$ع^2$

حيث $ع^2$ = تباين المعالجة الواحدة

مثال (6) :

إذا أعطيت بيانات الجدول التالى :

	العينة 1	العينة 2	العينة 3	العينة 4	العينة 5
حجم العينة	5	7	5	4	6
المتوسط	5.2	4.8	6.1	4.6	5.9
الانحراف المعيارى	1.1	0.8	1.2	0.9	1.2

هل تشير البيانات أن المتوسطات مختلفة بمستوى معنوية 5% .

م . م . ب = مجـ ن ($\bar{س} - \bar{\bar{س}}$)^2

$$\bar{\bar{س}} = \frac{5.9 + 4.6 + 6.1 + 4.8 + 5.2}{5} = 5.32$$

م . م . ب = $5(5.2 - 5.32)^2 + 7(4.8 - 5.32)^2 + 5(6.1 - 5.32)^2 +$
$4(4.6 - 5.32)^2 + 6(5.9 - 5.32)^2$

$= 9.0988$

$$ع^2_ب = \frac{9.0988}{4} = 2.2747$$

م . م . د = مجـ (ن − 1) ع^2

$= 4(1.1)^2 + 6(0.8)^2 + 4(1.2)^2 + 3(0.9)^2 + (1.2)^2$

$= 24.07$

$$ع^2_خ = \frac{24.07}{27 - 5} = 1.0941$$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	9.0988	4	2.2747	2.0791
داخل المعالجات	24.07	22	1.0941	
الكلى	33.1688	26		

الفرض العدمى: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

الفرض البديل: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 \neq \mu_4$

$ف_{الجدولية}$ بدرجات حرية 4 ، 22 ، 0.05 = 2.82

$ف_{المحسوبة}$ = 2.0791

المقارنة والاستنتاج والقرار: $ف_{المحسوبة}$ 2.0791 أقل من قيمة $ف_{الجدولية}$ نقبل الفرض العدمى ونقبل الفرض العدمى القائل بتساوى المتوسطات عند مستوى معنوية5%.

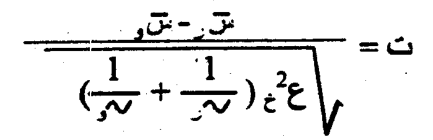
تحديد أزواج المعالجات التى توجد فروق معنوية بين متوسطاتها:

إذا قبل فرض العدم فى ضوء مقارنة $ف_{المحسوبة}$ بالقيمة الجدولية (α ، م – 1 ، ن – 3) فإن عملية التحليل تنتهى عند هذا الحد.

أما إذا رفض فرض العدم فإن هذا يعنى وجود فرق معنوى بين متوسطات معالجتين على الأقل. ولتحديد أى أزواج المعالجات توجد فروق معنوية بين متوسطاتها يتبع أسلوب الحد الأدنى للفروق المعنوية. (L.S.D)

ويتبع هذا الأسلوب لكل زوج من الأزواج الممكنة (أى لعدد $^مق_2$ من الأزواج الممكنة).

إذا كانت $\bar{س}_ر$ ، $\bar{س}_و$ ترمزان لمتوسطى المعالجتين رقم (ر) ورقم (و) على الترتيب وكانت أحجام العينتين العشوائيتين المحسوبتين المتناظرتين لهما هما $ن_ر$ ، $ن_و$ تحسب (ت) كالآتى :



حيث $ع^2_خ$ هو متوسط مربعات الخطأ العشوائى (متوسط مربعات داخل المعالجات)

وإذا كانت |ت| المحسوبة أكبر من ت ($\alpha/2$ ، ن – م) يكون هناك فرق معنوى متوسطى المعالجتين رقم (ر) ورقم (و) ، وفيما عدا ذلك لا يكون هناك فرق معنوى بين متوسطى هاتين المعالجتين

وإذا كانت أحجام العينات متساوية أى أن:

$$ن_1 = ن_2 = ... = ن_م$$

فإنه يمكن تحديد المعالجات التى توجد بين متوسطاتها فروق معنوية كالآتى:

1- يحسب أقل فرق معنوى بين أى معالجتين باستخدام الصيغة الآتية:

أقل فرق معنوى بين متوسطى معالجتين

$$= ت\,(\alpha/2 \text{ ، } ن - م) \times \sqrt{\frac{2 \times ع^2_خ}{ن_1}}$$

2- ولاختبار ما إذا كان هناك فرق معنوى بين متوسطى المعالجتين رقم (ر) ورقم (و) فإنه إذا كان الفرق الطلق بين متوسطى العينتين المناظرتين لهاتين المعالجتين - | $\bar{س}_ر - \bar{س}_و$ | أكبر من أقل فرق معنوى يكون هناك فرق معنوى بين متوسطى هاتين المعالجتين عند مستوى معنوية α وفيما عدا ذلك لا يكون هناك فرق معنوى بين متوسطى هاتين المعالجتين.

مثال (7)

من بيانات المثال الرابع المطلوب تحديد المعالجات التى يوجد بين متوسطاتها فروق معنوية عند مستوى معنوية 0.05

ويلاحظ أن: $ن_1 = ن_2 = ن_3 = 4$

$\bar{س}_1 = 7$ ، $\bar{س}_2 = 9$ ، $\bar{س}_3 = 5$

$ع^2_خ = 1$ ، $\alpha = 0.05$

$ت_{(0.025 ، 9)} = 2.262$

حيث أن أحجام العينات متساوية فإنه لا يمكن تطبيق العلاقة التالية لتحديد أقل فرق معنوى بين متوسطى عينتين:

أقل فرق معنوى بين متوسطى معالجتين

$$= ت_{(\alpha/2 ، ن - م)} \times \sqrt{\frac{2 \times ع^2_خ}{ن_1}}$$

وبالتعويض عن $ت_{(\alpha/2 ، ن - م)}$ ، $ع^2_خ$ ، $ن_1$ **بالقيم 2.262 ، 1 ، 4 ينتج أن**

أقل فرق معنوى بين متوسطى عينتين (الحد الأدنى للفروق المعنوية)

$$= 2.262 \times \sqrt{\frac{2 \times 1}{4}} = 1.599$$

وحيث إن:

الفرق المطلق بين متوسطى العينتين الأولى والثانية :

$$|\bar{س}_1 - \bar{س}_2| = |7 - 9| = 2$$

وهذا الفرق أكبر من أقل فرق معنوى بين متوسطى عينتين (1.599) فإنه يوجد فرق معنوى بين متوسطى المعالجتين الأولى والثانية.

وحيث إن:

$$| \bar{س}_1 - \bar{س}_2 | = | 7 - 5 | = 2 > 1.599$$

فإنه يوجد فرق معنوى بين متوسطى المعالجتين الأولى والثانية

وحيث إن :

$$| \bar{س}_1 - \bar{س}_2 | = | 9 - 5 | = 4 > 1.599$$

فإنه يوجد فرق معنوى بين متوسطى المعالجتين الثانية والثالثة.

مثال (8)

من بيانات المثال الخامس المطلوب تحديد المعالجات التى يوجد بين متوسطاتها فروق معنوية عند $\alpha = 5\%$

لتحديد أزواج المعالجات التى توجد فروق معنوية بين متوسطاتها نستخدم أسلوب الحد الأدنى للفروق المعنوية (كل معالجتين على حدة حيث إن عدد الوحدات بتجريبية غير متساوى) وذلك باستخدام توزيع ت حيث تحسب قيمة ت كالأتى :

$$ت = \frac{\bar{س}_ر - \bar{س}_و}{\sqrt{ع^2_خ \left(\frac{1}{ن_ر} + \frac{1}{ن_و}\right)}}$$

فإذا كانت ت المحسوبة (بإهمال الإشارة) أكبر من ت ($\alpha/2$ ، ن – م)

يكون هنا فرق معنوى بين متوسطى هاتين المعالجتين

$$\bar{\text{س}}_1 = \frac{20}{4} = 5 \quad , \quad \bar{\text{س}}_2 = \frac{33}{3} = 11$$

$$\bar{\text{س}}_3 = \frac{8}{4} = 2 \quad , \quad \bar{\text{س}}_4 = \frac{20}{2} = 10$$

$$|\text{ت}| = \frac{\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_2}{\sqrt{\text{ع}^2_\text{خ}\left[\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_2}\right]}} = \frac{11-5}{\sqrt{9.8\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right]}} = 2.5$$

$$|\text{ت}| = \frac{\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_3}{\sqrt{\text{ع}^2_\text{خ}\left[\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_3}\right]}} = \frac{2-5}{\sqrt{9.8\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right]}} = 1.355$$

$$|\text{ت}| = \frac{\bar{\text{س}}_1 - \bar{\text{س}}_4}{\sqrt{\text{ع}^2_\text{خ}\left[\frac{1}{\text{ن}_1} + \frac{1}{\text{ن}_4}\right]}} = \frac{10-5}{\sqrt{9.8\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right]}} = 1.844$$

$$|\text{ت}| = \frac{\bar{\text{س}}_2 - \bar{\text{س}}_3}{\sqrt{\text{ع}^2_\text{خ}\left[\frac{1}{\text{ن}_2} + \frac{1}{\text{ن}_3}\right]}} = \frac{2-11}{\sqrt{9.8\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right]}} = 3.76$$

$$|\text{ت}| = \frac{\bar{\text{س}}_2 - \bar{\text{س}}_4}{\sqrt{\text{ع}^2_\text{خ}\left[\frac{1}{\text{ن}_2} + \frac{1}{\text{ن}_4}\right]}} = \frac{10-11}{\sqrt{9.8\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right]}} = 0.35$$

$$|\text{ت}| = \frac{\bar{\text{س}}_3 - \bar{\text{س}}_4}{\sqrt{\text{ع}^2_\text{خ}\left[\frac{1}{\text{ن}_3} + \frac{1}{\text{ن}_4}\right]}} = \frac{10-2}{\sqrt{9.8\left[\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right]}} = 2.95$$

بالمقارنة بين ت الجدولية : ت ($\alpha/2$ ، ~ – م)

: ت (0.025 ، 13 - 4)

: ت (0.025 ، 9) = 2.262

- أى توجد فروق معنوية بين متوسطى المعالجتين الأولى والثانية.
- ولا توجد فروق معنوية بين متوسطى المعالجتين الأولى والثالثة.
- ولا توجد فروق معنوية بين متوسطى المعالجتين الأولى والرابعة.
- وتوجد فروق معنوية بين متوسطى المعالجتين الثانية والثالثة.
- لا توجد فروق معنوية بين متوسطى المعالجتين الثانية والرابعة.
- وتوجد فروق معنوية بين متوسطى المعالجتين الثالثة والرابعة.

ملحوظة:

إذا كانت المشاهدات الخاصة بالمعالجات بها أرقام كبيرة فيمكن تخفيض الجهد الحسابى بطرح مقدار ثابت من كل مشاهدة من المشاهدات ، ولن تتغير النتيجة ولكن يراعى أنة فى حالة استخدام أسلوب الحد الأدنى للفروق المعنوية فإننا نوجد المتوسطات للقيم الأصلية وليس للقيم بعد التخفيض.

مثال (9)

جربت 4 أنواع من الأغذية فى 4 مجموعات من حيوان معين وكانت الزيادة فى الوزن بعد مدة معينة كالأتى:

أ	7	8	8	10	12
ب	5	5	6	6	8
ج	6	7	8	9	10
د	5	7	7	8	8

استخدم أسلوب تحليل التباين لاختبار ما إذا كان هناك فروق معنوى بين الأغذية المختلفة.

يمكن تبسيط العمليات الحسابية عن طريق طرح مقدار ثابت من كل مفردة من المفردات ولن تتأثر النتيجة بذلك. فبدلا من أن نجرى التحليل على قيم س ف فإننا نجرى التحليل على انحرافات ح. وتستبدل العلاقات السابقة من س إلى ح.

بفرض أننا طرحنا المقدار الثابت 7 من كل مفردة من المفردات.

م	(المشاهدات – المقدار الثابت 7) = ح					مجـ ح	(مجـ ح)^2	مجـ ح^2
أ	صفر	1	1	3	5	10	100	36
ب	2-	2-	1-	1-	1	5-	25	11
ج	1-	صفر	1	2	3	5	25	15
د	2-	صفر	صفر	1	1	صفر	صفر	6
						10	150	68
						مجـ مجـ ح	مجـ (مجـ ح)^2	مجـ مجـ ح^2

$$(\text{م . م . ك}) = \text{مجـ مجـ ح}^2 - \frac{(\text{مجـ مجـ ح})^2}{\text{ن}}$$

$$= 68 - \frac{10 \times 10}{20} = 63$$

$$م.م.ب = \frac{(مجـ مجـ ح)^2}{ن_1} - \frac{(مجـ مجـ ح)^2}{ن}$$

$$= \frac{150}{5} - \frac{10 \times 10}{20} = 25$$

م . م . د = م . م . ك – م . م . ب = 63 – 25 = 38

$$ع^2_ب = \frac{م.م.ب}{م-1} = \frac{25}{4-1} = \frac{25}{3} = 8.3$$

$$ع^2_خ = \frac{م.م.د}{م-1} = \frac{38}{20-4} = \frac{38}{16} = 3.375$$

$$ف_{المحسوبة} \text{ (نسبة التباين)} = \frac{8.3}{2.375} = 3.51$$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	ف المحسوبة
بين المعالجات	25	3	8.3	3.51
داخل المعالجات	38	16	2.375	
الكلى	63	19		

الفرض العدمى: ض. : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

الفرض البديل ض$_1$: يوجد اثنان على الأقل من μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 غير متساويين.

ف الجدولية بدرجات حرية 3 ، 16 ، ومستوى معنوية 5% = 3.34

ف المحسوبة = 3.51

المقارنة والاستنتاج والقرار: $ف_{المحسوبة}$ 3.51 > $ف_{الجدولية}$ 3.24

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل أى يوجد اثنين على الأقل من

μ_1 μ_2 μ_3 μ_4 غير متساوين.

ولتحديد أى أزواج المعالجات توجد فروق معنوية بين متوسطتها نبدأ بالخطوات التالية:

1- إيجاد متوسط كل معالجة للقيم الأصلية:

$\bar{س}_1 = \frac{45}{5} = 9$ $\qquad$ $\bar{س}_2 = \frac{30}{5} = 6$

$\bar{س}_3 = \frac{40}{5} = 8$ $\qquad$ $\bar{س}_4 = \frac{35}{5} = 7$

2- يحسب أقل فرق معنوى = ت $(\alpha/2 \text{ ، } ن - م) \times \sqrt{\frac{2 \times ع_غ^2}{ن}}$

$$= ت_{(0.025 \text{ ، } 16)} \times \sqrt{\frac{2 \times 2.375}{5}}$$

$$= 2.12 \times \sqrt{\frac{2 \times 2.375}{5}} \qquad = 2.05$$

3- إيجاد الفروق المطلقة

$|\bar{س}_1 - \bar{س}_2| = |9 - 6| = 3$

$|\bar{س}_1 - \bar{س}_3| = |9 - 8| = 1$

$|\bar{س}_1 - \bar{س}_4| = |9 - 7| = 2$

$|\bar{س}_2 - \bar{س}_3| = |6 - 8| = 2$

$|\bar{س}_2 - \bar{س}_4| = |6 - 7| = 1$

$|\bar{س}_3 - \bar{س}_4| = |8 - 7| = 1$

وبمقارنة للفروق المطلقة بالحد الأدنى للفروق المعنوية نجد أن الحد المطلق 3 > الحد الأدنى للفروق المعنوية 2.05 أى توجد فروق معنوية بين المعالجات الأولى والثانية.

أما باقى أزواج المعالجات فلا توجد فروق معنوية بينهم حيث إن الفروق المطلقة بين أزواج هذه المعالجات < الحد الأدنى للفروق المعنوية.

مثال (10):

المطلوب باستخدام تحليل البيانات اختبار العلاقة بين مدة الخبرة وإنتاجية العامل / يوم جنية من إنتاج نوع معين من الأدوية من بيانات الجدول التالى:

عدد سنوات الخبرة	عدد العمال فى كل مجموعة	إنتاجية العمال/يوم جنية (عنبة دواء)				
8	5	33	37	32	31	37
12	3	30	35	28		
16	4	33	29	34	36	

يطرح مقدار ثابت وليكن 30 من المشاهدات نجد أن

م	(المشاهدات -30) = ح				
أ	3	7	2	1	7
ب	صفر	5	-2		
ج	3	-1	4	6	

مجـ ح	$(\text{مجـ ح})^2$	مجـ $ح^2$
20	400	112
3	9	29
12	144	62
35 مجـ مجـ ح	×	203 مجـ مجـ $ح^2$

$$\text{(م . م . ك)} = \text{مجـ مجـ ح}^2 - \frac{(\text{مجـ مجـ ح})^2}{\text{ن}}$$

$$= 203 - \frac{35 \times 35}{12} = 101$$

$$\text{م . م . ب} = \frac{\text{مجـ (مجـ ح)}^2}{\text{ن}_1} - \frac{(\text{مجـ مجـ ح})^2}{\text{ن}}$$

$$= \left[\frac{144}{4} + \frac{9}{3} + \frac{400}{5}\right] - \frac{35 \times 35}{12} = 17$$

م . م . د = م . م . ك – م . م . ب

$$= 101 - 17 = 84$$

$$\text{ع}^2_{\text{ب}} = \frac{\text{م . م . ب}}{\text{م} - 1} = \frac{17}{3 - 1} = \frac{17}{2} = 8.5$$

$$\text{ع}^2_{\text{خ}} = \frac{\text{م . م . د}}{\text{ن} - \text{م}} = \frac{74}{12 - 3} = \frac{84}{9} = 9.3$$

$$\text{ف}_{\text{المحسوبة}} \text{ (نسبة التباين)} = \frac{8.5}{9.3} = 0.91$$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات	ف المحسوبة
بين المعالجات	17	2	8.5	0.91
داخل المعالجات	84	9	9.3	
الكلي	101	11		

الفرض العلمي: ض. : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل ض$_1$: يوجد اثنان على الأقل من μ_1 ، μ_2 ، μ_3 غير متساويين.

ف$_{\text{الجدولية}}$: بمستوى معنوية 5% ودرجات حرية 2 ، 9 = 4.26

ف$_{\text{المحسوبة}}$ = 0.91

المقارنة والاستنتاج والقرار: ف$_{\text{المحسوبة}}$ 0.91 < ف$_{\text{الجدولية}}$ 4.26

ملحوظة:

في بعض الحالات نجد أن ف$_{\text{المحسوبة}}$ وهي التي تنتج من $\frac{ع^2_ب}{ع^2_خ}$ = ما لا نهاية

وهذا يعني أننا نرفض الفرض العدمي وليس هناك داع أن يذكر قيمة ف$_{\text{الجدولية}}$ لأنه مهما كانت قيمتها فإن ف$_{\text{المحسوبة}}$ أكبر منها.

مثال (11)

لمقارنة أربعة أنواع من الأدوية أ ، ب ، ج ، د لعلاج مرض معين اختيرت أربع عينات كل منها مكون من خمسة أشخاص من المصابين بذلك المرض وأعطيت كل عينة نوع من الأدوية وكان عدد أيام العلاج اللازمة حتى الشفاء في العينات الأربع كالأتي:

العينة الأولى (دواء أ)	7	3	4	6	5
العينة الثانية (دواء ب)	6	5	9	8	7
العينة الثالثة (دواء ج)	3	2	5	6	4
العينة الرابعة (دواء د)	8	6	3	7	6

اختبر فرض عدم وجود فرق معنوي بين متوسطات عدد الأيام اللازمة حتى الشفاء للأدوية الأربعة أ ، ب ، ج ، د وذلك عند مستوى معنوية 5% ف (0.05 ، 3 ، 6 = 3.24).

م	المشاهدات					مجـ س	^{2}(مجـ س)	مجـ س^2
أ	7	3	4	6	5	25	625	135
ب	6	5	9	8	7	35	1225	255
ج	3	2	5	6	4	20	400	90
د	8	6	3	7	6	30	900	194
						110	3150	674

م . م . ك = $674 - \frac{(110)^2}{20} = 69$

م . م . ب = $\frac{1}{5}(900 + 400 + 1225 + 625) - \frac{(110)^2}{20} = 25$

م . م . د = $69 - 25 = 44$

ع$^2_{ب}$ = $\frac{25}{3} = 8.3$

ع$^2_{خ}$ = $\frac{44}{16} = 2.75$

ف$_{المحسوبة}$ = $\frac{8.3}{2.75} = 3.02$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	د . ح	م .م المربعات	ف
بين المعالجات	25	3	8.3	3.02
داخل المعالجات	44	16	2.75	
الكلى	69	19		

الفرض العدمى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$

الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3 = \mu_4$

$3.024 =$ ف

$3.02 =$ ف المحسوبة

ف المحسوبة $<$ ف الجدولية

نقبل العدمى ونرفض البديل

مثال (12)

قامت إحدى الشركات الكبرى بتصنيف العاملين بها إلى ثلاث مجموعات عمرية ، ترغب الشركة فى معرفة درجة تساوى الاعتبارات الإنسانية والمبادئ فى هذه المجموعات وذلك باستخدام اختبار صمم خصيصا لتحقيق هذا الغرض. سحبت ثلاث عينات عشوائية مستقلة تتكون كل منها من أربعة عاملين من مجموعة عمرية للعينة فحصلنا على مجموع درجات الاختبار لكل عينة كما يلى:

مجـ$_{ر=1}^{4}$ س $= 30$ ، مجـ$_{ر=1}^{4}$ س $= 40$ ، مجـ$_{ر=1}^{4}$ س $= 35$

فإذا علمت أن مجـ المربعات (مجـ مجـ س^2) $=947$ فاختبر الفرض القائل بتساوى متوسطات درجات الاختبار للمجموعات العمرية الثلاث فى مقابل الفرض البديل لعدم تساوى المتوسطات عند $\alpha = 0.01$

$$\text{م . م . ب} = \frac{(30)^2}{4} + \frac{(40)^2}{4} + \frac{(35)^2}{4} - \frac{105 \times 105}{12} = 931.25 - 918.75 = 12.5$$

$$\text{م . م . د} = 947 - 931.25 = 15.75$$

$$\text{ع}^2_{\text{ب}} = \frac{12.5}{2} = 6.25$$

$$ع^2_خ = \frac{15.75}{12-3} = 1.75$$

$$\text{النسبة ف}_{\text{المحسوبة}} = \frac{ع^2_ت}{ع^2_خ} = \frac{6.25}{1.75} = 3.57$$

الفرض العدمى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

ف$_{\text{الجدولية}}$ بدرجات حرية 2 ، 9 ، 0.01 = 8.02

ف$_{\text{المحسوبة}}$ = 3.57

المقارنة والاستنتاج والقرار ف$_{\text{المحسوبة}}$ 3.57 < ف$_{\text{الجدولية}}$.

∴ نقبل الفرض العدمى القائل بتساوى المتوسطات الثلاث.

مثال (13)

اختيرت ثلاث عينات عشوائية عينة من القاهرة وعينة من الإسكندرية والثالثة من أسيوط حجم كل منها على التوالى هو 30 ، 20 ، 15 مفردة. وتم إيجاد الوسط الحسابى للمنصرف من الأدوية أسبوعيا لكل عينة فكان على التوالى 10 ، 8 ، 6 جنيهات ، فإذا علمت أن مجـ مجـ س^2 = 6653.85 .

المطلوب:

معرفة ما إذا كان اختلاف المدينة يؤثر تأثيرا جوهريا على المنصرف من الأدوية باستخدام مستوى معنوية (α 5%) وبفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا ولها تباين متساوى.

الحل:

$\bar{س}_1 = \frac{\text{مجـ س}_1}{ن_1}$

∴ $\text{مجـ س}_1 = \bar{س}_1 \times ن_1 = 10 \times 30 = 300$

$\bar{س}_2 = \frac{\text{مجـ س}_2}{ن_2}$

∴ $\text{مجـ س}_2 = \bar{س}_2 \times ن_2 = 8 \times 20 = 160$

$\bar{س}_3 = \frac{\text{مجـ س}_3}{ن_3}$

∴ $\text{مجـ س}_3 = \bar{س}_3 \times ن_3 = 6 \times 15 = 90$

<u>البيانات الأساسية</u>

$\text{مجـ مجـ س} = 300 + 160 + 90 = 550$

$\text{مجـ مجـ س}^2 = 6653.85$

$ن = ن_1 \div ن_2 + ن_3$

$= 30 + 20 + 15 = 65$

$(\text{م . م . ك}) = \text{مجـ مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{ن}$

$2000 = 4653.85 - 6653.85 = \frac{(550)^2}{2} - 6653.58 =$

$\text{م . م . ب} = \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{ن\ م} - \frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{ن}$

$166.15 = 4653.85 - 482 = \frac{(550)^2}{65} - [\frac{(90)^2}{15} + \frac{(160)^2}{20} + \frac{(300)^2}{30}] =$

م . م . د (م . م . الخطأ العشوائى)´ = م . م . ك – م . م . ب

$= 2000 - 166.15 = 84$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط مجموع المربعات	نسبة التباين ف محسوبة
م . م . ب	166.15	2	83.75 = 2/166.15	29.58/83.75
م . م . د	1833.85	62	29.58 =62/1833.85	3.81 =
الكلى	2000	64		

الفرض العدمى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

$ف_{الجدولية}$ بمستوى معنوية 5% وبدرجات حرية (2 ، 62) هى 3.15

$ف_{المحسوبة} = 3.81$

المقارنة والاستنتاج والقرار:

$ف_{المحسوبة} < ف_{جدولية}$

∴ يتم قبول الفرض العدمى أى قبول فرض العدم بعدم الاختلاف فى متوسط الإنفاق (المنصرف) على الأدوية بين المدن الثلاث.

مثال (14)

اختيرت ثلاث عينات بطريقة عشوائية حجم كل منها (4) مفردات فوجد أن مجموع مربعات الاختلاف الكلى (م . م . ك) = 84.671 وأن التباين داخل المجموعات = 8.83 وبفرض أن المجموعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا. فالمطلوب:

اختبار فرض العدم القائل بعدم الاختلاف بين متوسطات المجتمعات التى سحبت منها العينات بمستوى معنوية (α = 5%) إذا علمت أن :-

ف الجدولية $_{(3 ، 9)}$ = 3.86 ، ف$_{(3 ، 10)}$ = 4.1 ، ف$_{(2 ، 9)}$= 4.26

الحل:

ن = ن$_1$ + ن$_2$ + ن$_3$ = 4 + 4 + 4 = 12

عدد العينات = 3

م . م . ك = 84.67

التباين داخل المجموعات ع^2$_{خ}$ = $\frac{\text{م . م . د}}{\text{ن} - \text{م}}$

$8.83 = \frac{\text{م . م . د}}{9}$

∴ م . م . د = 8.83 × 9 = 79.47

∴ م . م . ب = م . م . ك − م . م . د

= 84.67 − 79.47 = 5.3

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط مجموع المربعات	نسبة التباين ف المحسوبة
بين المعالجات	5.3	2	5.3/2 =2.6	2.6/8.83
داخل المعالجات	79.47	9	79.47/9 =8.83	= 0.29
الكلى	84.67	11		

الفرض العدمى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

$ف_{المحسوبة} = 0.29$

$ف_{الجدولية} = ف_{(2 ، 9 0.05)} = 4.26$

المقارنة والاستنتاج والقرار:

$ف_{المحسوبة} < ف_{الجدولية}$.

∴ القرار قبول الفرض العدمى بعدم الاختلاف بين متوسطات المجتمعات عند مستوى معنوية 5%

تطبيقات محلولة على تحليل التباين

1. يدعى أحد صانعى المنسوجات القطنية بأن تباين قوة مقاومة القطع للخيوط القطنية التى تنتجها شركته أقل من تباين قوة مقاومته القطع الأخرى النايلون ، حيث يعتقد أن قوة مقاومة القطع بالأرطال تتبع توزيعات معتدلة. سحبت عينة عشوائية من 41 بكرة من خيوط القطن فوجد أن تباينها $ع_1^2=65$. سحبت عينة أخرى مستقلة من 25 بكرة من خيوط النايلون فوجد أن تباينها $ع_2^2=78$ هل تؤيد هذه البيانات الادعاء السابقة عند $\alpha = 0.05$

افترض أن σ_1^2 تمثل تباين المجتمع I (القطن) ، σ_2^2 تمثل تباين المجتمع II (النايلون). وبالتالى يكون فرض العد والبديل كما يلى:

الحل:

ض.: $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ ض$_1$: $\sigma_1^2 < \sigma_2^2$

وهذا بالطبع اختبار ذو طرف أيمن. وباستخدام ملحق هـ عند $\alpha=0.05$ ،

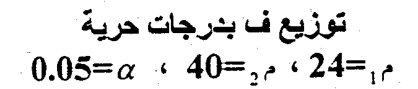
م$_1$ = 24 ، م$_2$ = 40 نجد أن قيمة ف الحرجة أى $ف_{(0.05\ \ 24\ \ 40)} = 1.79$

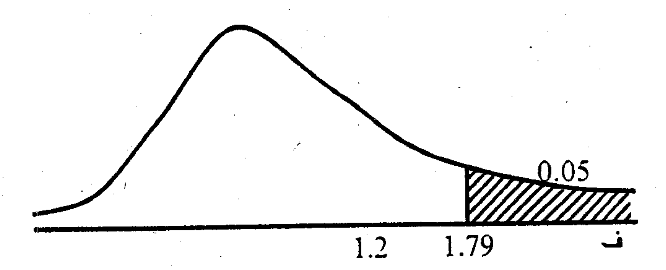
لذا فإن قاعدة القرار هى:

رفض ض. عندما تكون $\frac{ع_2^2}{ع_1^2} \geq 1.79$

وحيث أن قيمة النسبة ف تساوى $\frac{78}{65} = 1.2$ اقل من القيمة الحرجة فإننا نستنتج أن: تباين قوة مقاومة القطع لخيوط القطن ليس أقل بدرجة كافية من تباين

قوة مقاومة القطع لخيوط النايلون عند $\alpha=0.05$ ويبين الشكل التالى المنطقة الحرجة





2. لمقارنة طريقتين من طرق تعليم القراءة. سحبت عينتين مستقلين من الأطفال حيث استخدمت الطريقة أ لتعليم أطفال احدى العينتين واستخدمت الطريقة ب لتعليم أطفال العينة الأخرى (افترض أن تحديد الطريقة المستخدمة لتعليم كل عينة تم بطريقة عشوائية). البيانات التالية تمثل نتيجة اختبار موحد أعطى لأطفال العينتين:

	الطريقة أ	الطريقة ب
حجم العينة	$ن_1 = 25$	$ن_2 = 30$
تباين درجات العينة	$ع_1^2=108$	$ع_2^2=95$

افترض أن الدرجات تتبع توزيعين معتدلين لاختبار الفرض القائل بتساوى تباينى المجتمعين عند $\alpha=0.05$

الحل:

ض.: $\sigma_{أ}^2 = \sigma_{ب}^2$ ض1: $\sigma_{أ}^2 \neq \sigma_{ب}^2$

$م_1$= درجات حرية التباين الأكبر= 25-1=24

$م_2$= درجات حرية التباين الأصغر = 30-1 = 29

، بنسبة مستوى المعنوية على 2 نجد أن $ف_{(0.025 \ 24 \ 29)}=2.15$

قاعدة القرار:

رفض ض. عندما تكون $\frac{ع_1^2}{ع_2^2} \geq 2.15$

وحيث أن $\frac{ع_1^2}{ع_2^2} = \frac{108}{95} = 1.137$ أقل من قيمة ف الحرجة فإننا لا نرفض فرض العدم عند مستوى معنوية 0.05

3. افترض أن س ، ص متغيران معتدلان مستقلان. سحبت عينة من 31 مفردة من كل مجتمع من المجتمعين فوجد أن $ع_س^2=49$ ، $ع_ص^2=25$. اختبر الفرض القائل بأن تباين س اكبر معنويا من تباين ص عند $\alpha=0.05$

الحل:

ض.: $\sigma_س^2=\sigma_ص^2$ ض$_1$: $\sigma_س^2>\sigma_ص^2$

$ف_{(0.05 ، 30 ، 30)}= 1.84$

وحيث أن $\frac{ع_س^2}{ع_ص^2}=\frac{49}{25}= 1.96$ أكبر من القيمة الحرجة فإننا نرفض فرض العدم عند مستوى معنوية 0.05

4. فيما يلي المد باليوم التي يقضيها المريض بعد إجراء عملية الزائدة في ثلاث مستشفيات عامة

مستشفى (أ)	4	3	5
مستشفى (ب)	6	5	4
مستشفى (ج)	6	8	7

باستخدام أسلوب تحليل التباين اختبر الفرض القائل بأنه لا يوجد فرق معنوي في متوسط مدة الإقامة للمرضى في المستشفيات الثلاث بمستوى معنوية 5% (ف $_{2 ، 6 ، 5\%}$) = 5.14

الحل:

(1) المجاميع

م	س			مجـ (س)	(مجـ س)^2	مجـ س^2
(ا)	4	3	5	12	144	50
(ب)	6	5	4	15	225	77
(ج)	6	8	7	21	441	149
				48	810	276
				مجـ مجـ س	مجـ (مجـ س)^2	مجـ مجـ س^2

(2) مجموع المربعات:

م . م . ك (مجموع المربعات الكلى) = مجـ مجـ س^2 - $\frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{\text{ن}}$

$$= 276 - \frac{48 \times 48}{9} = 276 - 256 = 20$$

م . م . ب (مجموع المربعات بين المعالجات)

$$= \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{ن م}} - \frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

$$= \frac{810}{3} - \frac{48 \times 48}{9}$$

$$= 270 - 256 = 14$$

م . م . د أو الخطأ العشوائى (مجموع المربعات داخل المعالجات – مجموع المربعات الخطأ العشوائى)

= م . م . ك – م . م . ب

$$= 20 - 14 = 6$$

أو

$$= \text{مجـ مجـ س}^2 - \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{ن م}}$$

$$= 276 - \frac{810}{3}$$

$$= 276 - 270 = 6$$

(3) إيجاد التباينات

التباين بين المعالجات ($\text{ع}^2_{\text{ب}}$) = $\frac{\text{م . م . ب}}{\text{م} - 1}$

$$= \frac{14}{2} = 7$$

التباين داخل المعالجات (تباين الخطأ العشوائى) $\text{ع}^2_{\text{خ}}$

$$= \frac{\text{م . م . الخطأ العشوائى}}{\text{ن - م}}$$

$$= \frac{6}{9-3} = \frac{6}{6} = 1$$

(4) إيجاد نسبة التباين = $ف_{المحسوبة}$

$$= \frac{ع_{ب}^2}{ع_{خ}^2} = \frac{7}{1} = 7$$

(5) تصوير جدول تحليل التباين.

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	التباين متوسط المربعات	نسبة التباين ($ف_{المحسوبة}$)
بين المعالجات	14	2	7	7
الخطأ العشوائي	6	6	1	
الكلي	20	8		

(6) اختبارات الفروض الإحصائية

الفرض العدمي: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل: توجد على الأقل اثنين من μ_1 μ_2 μ_3 غير متساوين

$ف_{الجدولية}$ (2 ، 6 ، 0.05) = 5.14

$ف_{المحسوبة}$ = 7

المقارنة والاستنتاج والقرار: $ف_{المحسوبة}$ (7) أكبر من $ف_{الجدولية}$

∴ نرفض الفرض العدمي ويقبل الفرض البديل أن توجد فروق معنوية في متوسط مدة الإقامة بالمستشفيات الثلاث بمستوى معنوية 5%.

5. لاختبار ثلاثة وسائل لتنظيم الأسرة. أجرى بحث تقييمى على 12 سيدة وكانت النتائج كالتالى:

(أ) 4 9 6 5 6

(ب) 2 4 3

(ج) 6 4 1 5

اختبر الفرض القائل بأنه لا يوجد فرق معنوى بين الوسائل الثلاثة إذا علمت أن $ف_{(2 ، 9 ، 0.05)} = 4.26$

م	س					مجـ س	(مجـ س)^2	مج س^2
أ	4	9	6	5	6	30	900	194
ب	2	4	3			9	81	29
ج	6	4	1	5		16	256	78
						55		301

$$\text{م . م .ك} = 301 - \frac{55 \times 55}{12} = 301 - 252 = 49$$

$$\text{م . م . ب} = [\frac{900}{5} + \frac{81}{3} + \frac{256}{4}] - \frac{55 \times 55}{12}$$

$$= (64 + 27 + 180) - 252$$

$$= 271 - 252 = 19$$

$$\text{م . م . الخطأ العشوائى} = 49 - 19 = 30$$

$$= 301 - [\frac{256}{4} + \frac{81}{3} + \frac{900}{5}]$$

$$= 301 - 271 = 30$$

$$ع^2_ب = \frac{19}{2} = 9.5$$

$$ع^2_خ = \frac{30}{12-3} = \frac{30}{9} = 3.3$$

$$ف_{المحسوبة} = \frac{9.5}{3.3} \cong 2.9$$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	التباين (متوسط المربعات)	فـالمحسوبة (نسبة التباين)
بين المعالجات	19	2	9.5	2.9
الخطأ العشوائي	30	9	3.3	
الكلي	49	11		

الفرض العدمي: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل: يوجد على الأقل اثنان من μ_1 μ_2 μ_3 غير متساوين أو

$(\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3)$

فـالجدولية بدرجات حرية 2 ، 9 ، 0.05 = 4.26

فـالمحسوبة = 2.9

المقارنة والاستنتاج والقرار: فـالمحسوبة (2.9) أقل من فـالجدولية (4.26)

∴ نقبل الفرض العدمي بأنة لا يوجد فرق معنوى بين الوسائل الثلاثة بمستوى معنوية 5% فرق معنوى بين الوسائل الثلاثة بمستوى معنوية 5%

6. بفرض أن لدينا البيانات الآتية عن 4 عينات :

العينة	حجم العينة	(مجـ س)
(أ)	4	20
(ب)	3	33
(ج)	4	8
(د)	2	20

وإذا علمت أن مجموع مربعات جميع القيم مجـ س^2 = 767 باستخدام تحليل التباين اختبر هل هناك فرق معنوى بين المعالجات الثلاث بمستوى معنوى 5%

ن	مجـ س	^{2}(مجـ س)
4	20	400
3	33	1089
4	8	64
2	20	400
	81	

م . م . ك = $767 - \frac{81 \times 81}{13}$

$= 767 - 504.7 = 262.3$

= م . م . ب = $\left[\frac{400}{4} + \frac{1089}{3} + \frac{64}{4} + \frac{400}{2}\right] - 504.7$

$= 679 - 504.7 = 174.3$

م . م . الخطأ العشوائى = م . م . ك – م . م . ب

(أو) = مجـ مجـ س^2 - $\frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{ن م}}$

$= 767 - \left[\frac{400}{4} + \frac{1089}{3} + \frac{64}{4} + \frac{400}{2}\right]$

$= 767 - 679 = 88$

$ع^2_ب = \frac{174.3}{3} = \frac{88}{9} = 9.8$

$ع^2_خ = \frac{88}{13-4} = \frac{88}{9} = 5.9$

$ف_{المحسوبة} = \frac{58.1}{9.8} = 5.9$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجة الحرية	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين ($ف_{المحسوبة}$)
بين المعالجات	174.3	3	58.1	5.9
الخطأ العشوائى	88	9	9.8	
الكلى	262.3	12	ــــ	ــــ

الفرض العدمى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل : $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

$ف_{الجدولية}$ بدرجات حرية 3 ، 9 ، 0.05 = 3.68

$ف_{المحسوبة}$ = 5.9

المقارنة والاستنتاج والقرار $ف_{المحسوبة}$ (5.9) أكبر من $ف_{الجدولية}$ 3.68

∴ نرفض الفرض العدمى ونقبل الفرض البديل .

أى أن هناك فروق معنوية بين المعالجات الثلاث بمستوى معنوية 5%

7. أربع مجموعات من الفئران (مستقلة) أعطيت لكل مجموعة نوع معين من الفيتامينات وقيست الزيادة فى الوزن فى كل مجموعة وكانت النتائج كالتالى :

$\sum_{ر=1}^{4}$ مجـ س(1) = 20 ، $\sum_{ر=1}^{4}$ مجـ س(2) = 33 ، $\sum_{ر=1}^{3}$ مجـ س(3) = 8 ، $\sum_{ر=1}^{2}$ مجـ س(4) = 20

فإذا علمت أن مجـ المربعات (مجـ مجـ س^2) = 767

والمطلوب اختبار هل هناك فرق معنوى بين الفيتامينات المختلفة

مجـ مجـ س = 20 + 33 + 8 + 20 = 81

ن = 4 + 4 + 3 + 2 = 13

م . م . ب = $\frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{ن م}} - \frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{\text{ن}}$

$$= \left[\frac{20^2}{4} + \frac{33^2}{4} + \frac{8^2}{3} + \frac{20^2}{2}\right] - \frac{81\times81}{13}$$

$$= \left[\frac{400}{4} + \frac{1089}{4} + \frac{64}{3} + \frac{400}{2}\right] - \frac{81\times81}{13}$$

$$= 100 + 272.25 + 21.33 + 200 - 504.69$$

$$= 593.58 - 504.69 = 88.89$$

م . م . الخطأ العشوائى = مجـ مجـ س^2 − $\frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{ن م}}$

$$= 767 - 593.58 = 173.42$$

$$ع_ب^2 = \frac{\text{م.م.ب}}{\text{م} - 1} = \frac{88.89}{4-1} = \frac{88.89}{3} = 29.63$$

$$ع_خ^2 = \frac{\text{م . م . الخطأ}}{\text{ن} - \text{م}}$$

$$= \frac{173.42}{13-4} = \frac{173.42}{9} = 19.27$$

نسبة التباين (ف$_{\text{المحسوبة}}$) = $\frac{ع_ب^2}{ع_خ^2} = \frac{29.63}{19.27} = 1.54$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	88.89	3	29.63	1.54
الخطأ العشوائى	173.42	9	19.27	
الكلى	262.31	12	——	——

الفرض العدمي: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل: يوجد اثنان على الأقل من μ_1 μ_2 μ_3 غير متساوين.

ف_{الجدولية} بمستوى معنوية 5% وبدرجات حرية 3 ، 9 = 3.86

المقارنة والاستنتاج: ف_{المحسوبة} (1.54) < ف_{الجدولية} 3.86

∴ نقبل الفرض العدمي أي لا توجد فروق معنوية بين الفيتامينات المختلفة بمستوى معنوية 5%

8. تم اختيار 3 عينات من ثلاث مجتمعات حجم كل منها 4 مفردات وكان مجموع يتم الثلاث على التوالي 28 ، 36 ، 20 وكان مجموع مربعات القيم كلها 629

وبفرض أن المجتمعات المسحوبة منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا وتبايناتها متساوية.

- اختبر فرض العدم بعدم اختلاف بين المتوسطات الثلاثة.

الحل:

مجـ مجـ س = 28 + 36 + 20 = 84 ، ن = 12

$$\text{م . م . ب} = \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{ن م}} - \frac{(\text{مجـ مجـ س})^2}{\text{ن}}$$

$$= \left[\frac{28^2}{4} + \frac{36^2}{4} + \frac{20^2}{4}\right] - \frac{84\times84}{12}$$

$$= \frac{2480}{4} - 588 = 620 - 588 = 32$$

$$\text{م . م . الخطأ العشوائي} = \text{مجـ مجـ س}^2 - \frac{\text{مجـ (مجـ س)}^2}{\text{ن م}}$$

$$= 629 - 620 = 9$$

$$ع^2_{ب} = \frac{م.م.ب}{م-1} = \frac{32}{3-1} = 16$$

$$ع^2_{خ} = \frac{م.م.الخطأ}{ن-م} = \frac{9}{12-3} = 1$$

نسبة التباين (ف$_{المحسوبة}$) $= \frac{ع^2_{ب}}{ع^2_{خ}} = \frac{16}{1} = 16$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	32	2	16	16
الخطأ العشوائي	9	9	1	
الكلي	41	11	ــــ	ــــ

الفرض العدمي: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل: يوجد اثنان على الأقل من المتوسطات μ_1 μ_2 μ_3 غير متساويان.

ف$_{الجدولية}$ بمستوى معنوية 5% درجات حرية 2 ، 9 = 2.26

ف$_{المحسوبة}$ = 16 (من جدول تحليل التباين)

المقارنة والاستنتاج والقرار ف$_{المحسوبة}$ (16) > ف$_{الجدولية}$ (4.26)

∴ نرفض الفرض العدمي ونقبل لفرض البديل أي يوجد فروق معنوية بين العينات الثلاثة بمستوى معنوية 5%

9. اختيرت ثلاث عينات عشوائية من القاهرة والمنصورة وأسيوط حجم كل منها على التوالي 30 ، 20 ، 15 وتم إيجاد الوسط الحسابي للمنصرف على اللحوم أسبوعيا لكل عينة فكان كالأتي : 10 ، 8 ، 6 ج

فإذا علمت أن مجموع مربعات القيم كلها (مجـ مجـ س^2) = 6653.85

فالمطلوب معرفة ما إذا كان اختلاف المدينة يؤثر تأثيرا جوهريا على استهلاك

اللحوم باستخدام مستوى معنوية 5% ونفرض أن المجتمعات المسحوبة منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا ولها تباين متساوى

مجـ س$_1$ = 10 × 30 = 300
مجـ س$_2$ = 8 × 20 = 160
مجـ س$_3$ = 6 × 15 = 90

مجـ مجـ س = 550

ن = 30 + 20 + 15 = 65

م . م . ب = $\left[\frac{300^2}{30}+\frac{160^2}{20}+\frac{90^2}{15}\right]-\frac{550\times550}{65}$

= 4820 − 4653.85 = 166.15

م . م . الخطأ = 6653.85 - 4820 = 1833.85

ع$^2_{ب}$ = $\frac{166.15}{3-1}$ = 83.075

ع$^2_{خ}$ = $\frac{1883.85}{65-3}$ = 29.58

نسبة التباين (ف$_{المحسوبة}$) = $\frac{83.075}{29.58}$ = 2.81

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	متوسط المربعات (التباين)	نسبة التباين (ف)
بين المعالجات	166.15	2	83.075	2.81
الخطأ العشوائي	1833.85	62	29.58	
الكلي	2000	64	ــــ	ــــ

الفرض العدمي: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل: يوجد اثنان على الأقل من المتوسطات μ_1 μ_2 μ_3 غير متساويان.

ف$_{الجدولية}$ بدرجات حرية 2 ، 62 ، مستوى معنوية 5% = 3.15

$ف_{المحسوبة} = 2.81$

المقارنة والاستنتاج والقرار $ف_{المحسوبة}$ (2.81) < $ف_{الجدولية}$ (3.15)

∴ نقبل الفرض العدمى ونقبل لفرض البديل أى عدم الاختلاف فى متوسط الإنفاق على اللحوم بين المدن الثلاثة بمستوى معنوية 5%

10. اختيرت (3) عينات بطريقة عشوائية حجم كل منها 4 مفردات فوجد أن مجموع مربعات الاختلاف الكلى (م . م . ك) = 28.25 وأن التباين داخل المجموعات ت. ($ع^2_خ$) = 1.75

اختبر الفرض القائل بعدم الاختلاف بين متوسطات المجتمعات التى سحبت منها العينات بمستوى معنوية 1%

$$ع^2_خ = \frac{م . م . الخطأ}{ن - م}$$

$$1.75 = \frac{م . م . الخطأ}{12 - 3} = \frac{م . م . الخطأ}{9}$$

$$∴ م . م . الخطأ = 1.75 \times 9 = 15.75$$

$$م . م . ب = م . م . ك - م . م . الخطأ$$

$$= 28.25 - 15.75 = 12.50$$

$$ع^2_ب = \frac{12.5}{3 - 1} = \frac{12.5}{2} = 6.25$$

$$ع^2_خ = 1.75$$

$$ف_{المحسوبة} = \frac{6.25}{1.75} = 3.57$$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	التباين	ف المحسوبة
بين المعالجات	12.5	2	6.25	3.57
الخطأ العشوائى	15.75	9	1.75	
الكلى	28.25	11	—	—

الفرض العدمى: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل: يوجد اثنان على الأقل من المتوسطات μ_1 μ_2 μ_3 غير متساويان.

$ف_{الجدولية}$ بمستوى معنوية 1% درجات حرية 2 ، 9 = 8.02

$ف_{المحسوبة}$: 3.75

المقارنة والاستنتاج والقرار $ف_{المحسوبة}$ (3.57) < $ف_{الجدولية}$ (8.02)

∴ نقبل الفرض العدمى لعدم الاختلاف بين متوسطات المجتمعات التى سحبت منها العينات بمستوى معنوية 1%

11. من بيانات الجدول التالى :

	حجم العينة	الوسط الحسابى	الانحراف المعيارى
(1)	4	12	2
(2)	5	10	3
(3)	6	8	1

هل تشير البيانات أن المتوسطات مختلفة بمستوى معنوية 5%

الحل:

$$\bar{\bar{س}} = \frac{8+1+12}{3} = 10$$

$$م.م.ب = مجـ\, ن\, (\bar{س} - \bar{\bar{س}})^2$$

$$= 4\,(10-12)^2 + 5\,(10-10)^2 + 6\,(10-8)^2$$

$= 4 \times 4 +$ صفر $+ 4 \times 6 = 16 + 26 = 40$

م . م . الخطأ = مجـ ($\sim - 1$) $ع^2$

$= 3 \times (2)^2 + 4 \times (3)^2 + 5 \times (1)^2$

$= 3 \times 4 + 4 \times 9 + 5$

$= 12 + 36 + 5 = 53$

$ع^2_ب = \frac{م.م.ب}{م-1} = \frac{40}{2} = 20$

$ع^2_خ = \frac{م.م.الخطأ}{\sim - م} = \frac{53}{15-3} = \frac{53}{12} = 4.4$

$ف = \frac{20}{4.4} = 4.5$

جدول تحليل التباين

المصدر	مجـ المربعات	درجات الحرية	التباين	$ف_{المحسوبة}$
بين المعالجات	40	2	20	4.5
الخطأ العشوائى	53	12	4.4	
الكلى	93	14	——	——

الفرض العدمى : $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$

الفرض البديل: يوجد اثنان على الأقل من المتوسطات μ_1 ، μ_2 ، μ_3 **غير متساويان.**

$ف_{الجدولية}$ بمستوى معنوية 5% درجات حرية 2 ، 12 = 7.8

$ف_{المحسوبة}$ = 4.5

المقارنة والاستنتاج والقرار $ف_{المحسوبة}$ (4.5) > $ف_{الجدولية}$ (7.8)

∴ نقبل الفرض العدم القائل بتساوى المتوسطات عند مستوى معنوية 5%

تطبيقات على تحليل التباين

1. سحبت عينة عشوائية من 4 مفردات من كل نوع أربعة أنواع من الفيتامينات واختبر كل منها لمعرفة مدى تأثير كل نوع فحصلنا على البيانات التالية :

مجـ $س_1 = 60$ ، مجـ $س_2 = 40$ ، مجـ $س_3 = 52$ ، مجـ $س_4 = 40$
مجـ مجـ $س^2 = 2424$

افترض أن أنواع الفيتامينات يتبع توزيعات معتدلة وأن العينات مستقلة لاختبار الفرض القائل بتساوى متوسطات هذه الأنواع الأربعة عند مستوى معنوية 5%

2. البيانات التالية تمثل درجات اختبار أعطى لمجوعتين مستقلتين من الطلبة تتكون من كل منها من 11 طالب.

افترض أن الدرجات تتبع توزيعات معتدلة لاختبار الفرض القائل بتساوى التباينات عند مستوى معنوية $\alpha = 0.10$

المجموعة الأولى	97	96	92	89	88	85	80	77	70	70	64
المجموعة الثانية	63	53	89	80	26	81	98	76	57	55	99

3. وزعت ستة عشر فأرا توزيعا متساويا عشوائيا على أربعة معالجات (أ إلى د) ثم قيست خاصية ماودونت فكانت كالأتى:

أ	0.3	1.3	0.8	1.1
ب	4.6	3.3	1.2	2.6
ج	2	3	3.8	1.4
د	3	5.1	3.1	1.9

هي يمكننا استنتاج وجود فرق حقيقى بين المعالجات الأربعة ؟

4. اختيرت ثلاث عينات عشوائية عينة من القاهرة والأخرى من الإسكندرية والثالثة من أسيوط حجم كل منها على التوالى هو 60 ، 60 ، 20 مفردة وتم إيجاد الوسط الحسابى للمنصرف على اللحوم أسبوعيا بكل عينة على التوالى فكان على التوالى 15 ، 12 ، 8 ج. فإذا علمت أن مجـ مجـ س^2 = 8653.75

المطلوب:

معرفة ما إذا كان اختلاف المدينة يؤثر تأثيرا جوهريا على استهلاك اللحوم باستخدام مستوى معنوية (α = 5%) وبفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا ولها تباين متساوى.

5. اختيرت ثلاث عينات بطريقة عشوائية حجم كل منة (4) مفردات فوجد أن مجموع مربعات الاختلاف الكلى (م . م . ك) = 168.671 وأن التباين داخل المجموعات = 16.83. وبفرض أن المجموعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا وتباينها متساوى.

المطلوب:

اختبار فرض العدم القائل بعدم الاختلاف بين متوسطات المجتمعات التى سحبت منها العينات بمستوى معنوية (α = 5%).

6. افترض أننا نرغب فى معرفة ما إذا كان تباين وزن طالبات المدارس الثانوية أكبر من تباين وزن طلبة المدارس الثانوية. سحبت عينة عشوائية لـ 25 طالبة فوجد أن انحرافها المعيارى يساوى 20 كيلو جرام. سحبت عينة أخرى مستقلة من 20 طالب فوجد أن انحرافها المعيارى يساوى 15 كيلو جرام. افترض أن الأوزان تتبع توزيعات بأن تباين أوزان الطالبات أكبر من تباين أوزان الطلبة.

7. افتــرض أن س ، ص متغيــران معتــدلان مــستقلان. ســحبت عينتــين عشوائيتين فحصلنا على البيانات التالية:

$ع^2_س = 85$ ، $ع^2_ص = 100$ ، $ن_س = 21$ ، $ن_ص = 31$

استخدم هذه البيانات لاختبار الفرض القائل بأن تباين س يساوى تباين ص عند $\alpha = 0.05$

8. افترض أن س ، ص متغيـران عشوائيان معتـدلان يمـثلان الإنتاجيـة فـى الساعة لعمليتى انتاج مستقلين فإذا علمت أن

$ع^2_س = 4$ ، $ع^2_ص = 9$ ، $ن_س = 21$ ، $ن_ص = 31$

استخدم هذه البيانات لاختبار فرض العدم القائل بأن $\sigma^2_س = \sigma^2_ص$ فى مقابل الفرض البديل القائل بأن $\sigma^2_س > \sigma^2_ص$ عند $\alpha = 0.05$

9. سحبت عينـة عشوائية من 4 مفردات من كل نـوع من أربعة أنواع من البطاريات الصغيرة واختبر كل منها لمعرفة العمر الإنتـاجى بالساعات فحصلنا على البيانات التالية :

مجـ $س_{1د} = 60$ ، مجـ $س_{2د} = 40$ ، مجـ $س_{3د} = 52$

مجـ $س_{4د} = 40$ ، مجـ مجـ $س = 192$ ، مجـ مجـ $س^2 = 2424$

أفترض أن أعمـار البطاريـات تتبع توزيعات معتدلة وأن العينـات مـستقلة لاختبـار الفـرض القائـل بتساوى متوسطات أعمـار الأنـواع الأربعـة عند مـستوى معنوية $\alpha = 0.05$

10. تستخدم ماكينتين أ ، ب لإنتاج أنواع متماثلة من المزاليج تتبع أطواليا توزيعات معتدلة. سحبت عينة عشوائية من 31 مزلاجا من إنتاج الماكينة أ فوجد أن تباينها $ع^2_1 = 1$. سحبت عينة أخرى مستغلة من 41 مزلاجا من

إنتاج الماكينة ب فوجد أن تباينها ع22 = 2. اختبر فرض العدم القائل بتساوى تبايني أطوال المزاليج التى تنتجها الماكينتين فى تقابل الفرض البديل القائل باختلاف التباينين عند مستوى معنوية $\alpha = 0.1$

11.اختيرت ثلاث عينات عشوائية لثلاث أنواع من أجهزة قياس الدهون فى الدم المنتجة بواسطة ثلاث مصانع مختلفة لمعرفة متوسط العمر الافتراضى لكل نوع وبفرض أن مجموع المربعات الكلية م . م . ك = 2000 وبفرض أن لديك البيانات التالية:

البيان	المصنع الأول	المصنع الثانى	المصنع الثالث
حجم العينة	30	20	15
متوسط عمر الجهاز	10	8	6

المطلوب:

معرفة ما إذا كان هناك اختلاف جوهريا فى متوسط عمر الأنواع الثلاثة من أجهزة قياس الدهون فى الدم بمستوى معنوية 5% وبفرض أن عمر الأجهزة فى المصانع الثلاثة موزعة توزيعا طبيعيا وأن تباينها متساوى ف (2 ، 62 ، 0.05) = 3.15

12. اختيرت (3) عينات بطريقة عشوائية حجم كل منها (4) مفردات فوجد أن مجموع المربعات الكلى (م . م . ك) = 84.67 وان التباين داخل المجموعات (ع2خ) = 8.83 وبفرض أن المجتمعات المسحوبة منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا وان تباينها متساوى.

المطلوب:

اختبار الفرض القائل بعدم الاختلاف بين المتوسطات التى سحبت منها العينات بمستوى معنوية 5% . ف$_{(2 ، 9 ، 0.05)}$ = 4.26

13. تم اختيار (3) عينات بطريقة عشوائية من ثلاث مجتمعات حجم كل عينة على التوالى (6 ، 5 ، 4) وكان مجموع قيم العينات الثلاثة على التوالى هو (30 ، 22 ، 28) وكان مجموع مربعات القيم كلها مجـ س2 = 510 وبفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا وتباينها متساوى بالنسبة لظاهرة محل القياس.

المطلوب:

أ- اختبار فرض العدم القائل بعدم الاختلاف بين متوسطات المجتمعات بمستوى معنوية 5%

ب- تصوير جدول تحليل التباين ف$_{(2 ، 12 ، 0.05)}$ = 3.89

14. تم اختيار (4) عينات بطريقة عشوائية من أربعة مجتمعات حجم كل عينة على التوالى (4 ، 3 ، 4 ، 2) وكان الوسط الحسابى لكل عينة على التوالى (5 ، 11 ، 2 ، 10) وكان مجموع مربعات القيم كلها 767 (مجـ س^2) وبفرض أن المجتمعات المسحوب منها العينات موزعة توزيعا طبيعيا وتباينها متساوى بالنسبة للظاهرة محل القياس.

المطلوب:

اختبار فرض العدم القائل بعدم الاختلاف بين متوسطات المجتمعات بمستوى معنوية 5% ، ثم تصوير جدول تحليل التباين. ف$_{(3 ، 9 ، 0.05)}$ = 3.86

15. يمثل الإصابة بارتفاع ضغط الدم أحد الأمراض المنتشرة. أخذت عينة عشوائية من هؤلاء المرضى وأعطيت لكل مجموعة أحد العقاقير خفض الضغط وكانت النتائج كالتالى:

أ	ب	ج
130	160	120
120	170	120
140	150	110
110	160	120
100		120
		130

المطلوب:

اختبر الفرض القائل بأنة يوجد اختلاف معنوى بين أثر الأدوية الثلاثة علما بأن $ف_{(2 ، 12 ، 5\%)} = 7.8$.

16. لاختبار ثلاثة وسائل لتنظيم الأسرة أجرى بحث تقيمى على 12 سيدة وكانت النتائج كالتالى:

أ	ب	ج
14	12	16
19	14	14
16	13	11
15		15
16		

اختبر الفرض القائل أنة لا يوجد فرق معنوى بين الوسائل الثلاثة إذا علمت أن $ف_{(2 ، 9 ، 5\%)} = 4.26$

17. قامت إحدى شركات إنتاج الأجهزة الطبية بتصنيف هذه الأجهزة إلى ثلاث أنواع واختبرت كل منها لمعرفة العمر الإنتاجي بالساعات وحصلنا على البيانات الآتية:

النوع	عدد الوحدات	مجموع الساعات (مجـ س)
الأول	4	30
الثانى	4	40
الثالث	4	35

فإذا علمت أن مجـ مجـ $س^2 = 947$. باستخدام أسلوب تحليل التباين اختبر الفرض القائل بتساوى متوسطات أعمار الأنواع الثلاثة من هذه الأجهزة عند مستوى معنوية 1% . ف(بمستوى معنوية 1% ودرجات حرية 2 ، 9) = 8.02

18. استخدمت ثلاثة أنواع من المضادات الحيوية فى علاج مرض معين اختير 12 مريضا لاستخدام هذه الأنواع من المضادات الحيوية وسجلت عدد أيام الشفاء من المرضى لكل نوع من المضادات على النحو التالى:

	عدد المرضى	مجموع أيام الشفاء (مجـ س)
المضاد الحيوى (أ)	4	28
المضاد الحيوى (ب)	4	36
المضاد الحيوى (ج)	4	20

اختبر باستخدام تحليل التباين ما إذا كان هناك فروق معنوى بين متوسطات أيام الشفاء للمضادات الحيوية الثلاثة عند مستوى المعنوية 5% (ف 2 ، 9 ، 5% = 4.26)

19. البيانات التالية مستقاة من تجربة دواء جديد على مرضى الانكلستوما. اختيرت أربعة مجموعات وأعطيت كل مجموعة مستوى تركيز معين. وكانت النتائج كالتالى:

المجموعة (م)	حجم المجموعة	مجموع المشاهدات (مجـ س)
الأولى	4	12
الثانية	5	10
الثالثة	5	25
الرابعة	3	1

وكانت مجـ مجـ س^2 = 216 والمطلوب باستخدام أسلوب تحليل التباين اختبار الفرض القائل بأن نسب التركيز المستخدمة ليس لها أثر على النتائج وتصوير جدول تحليل التباين وذلك بمستوى معنوية 5%. ف$_{(3 ، 13 ، 0.05)}$ = 3.41

20. قامت إحدى شركات الأدوية بتصنيف العاملين بها إلى ثلاث مجموعات عمرية ، وترغب الشركة فى معرفة درجة تساوى الاعتبارات الإنسانية

والمبادئ فى هذه المجموعات وذلك باستخدام اختبار صمم خصيصا لتحقيق هذا الغرض . سحبت ثلاث عينات عشوائية مستقلة تتكون كل منها من أربعة عاملين فى كل مجموعة عمرية فحصلنا على مجموع درجات الاختبار لكل عينة كما يلى:

م	مجـ س
(1)	30
(2)	40
(3)	35

فإذا علمت أن مجـ مجـ $س^2 = 947$

والمطلوب :

(1) تصوير جدول تحليل التباين

(2) اختبار الفرض القائل بتساوى متوسطات درجات الاختبار للمجموعات العمرية الثلاث فى مقابل الفرض البديل بعدم تساوى المتوسطات عند مستوى المعنوية 0.01 $ف_{(2 ، 9 ، 1\%)} = 8.02$

الفصل الرابع

الانحدار البسيط
والارتباط البسيط

الانحدار البسيط والارتباط البسيط

Simple Regression and Simple Correlation

فى الأبواب السابقة تحت مناقشة مشاكل تتعلق بمتغير عشوائى واحد (تحليل المتغير الواحد).

ونبدأ الآن مناقشة بعض المشاكل التى تتضمن متغيرين. ففى كثير من الأحيان نحصل على أزواج من القيم لزوج من المتغيرات التى نرغب فى تحديد العلاقة بينهما. فمثلا قد يهتم المسئول عن قبول الطلاب بإحدى الكليات بالعلاقة بين المعدل التراكمى للطلاب فى المرحلة الثانوية ومعدلهم التراكمى بالكلية . وتسمى الأساليب المستخدمة فى تناول هذا النوع من المشاكل بأساليب الانحدار والارتباط.

بعض المفاهيم الانحدار والارتباط

تشير أساليب الانحدار إلى الطرق المستخدمة للتوصل إلى معادلة لتوثيق البيانات المتاحة. ويمكن استخدام هذه المعادلة فى التقدير والتنبؤ ويسمى المتغير الذى قد نرغب فى التنبؤ به أو تقديره بالمتغير التابع ، بينما يسمى المتغير الآخر بالمتغير المستقل وسنشير فى معادلة الانحدار البسيط إلى المتغير المستقل بالرمز س كما سنشير إلى المتغير التابع بالرمز ص. وتسمى هذه المعادلة معادلة انحدار ص على س.

وعموما ، تكتب معادلة الانحدار البسيط كما يلى:

ص = أ + ب س..(1)

حيث تمثل أ الجزء المقطوع من المحور الرأسى ، أى النقطة التى يتقاطع عندها خط الانحدار مع المحور الرأسى ، بينما تمثل ب ميل خط الانحدار ، أى التغير فى ص المناظر للتغير بوحدة واحدة فقط فى س. وللتوصل إلى معادلة الانحدار يجب الحصول على قيمة كل من أ ، ب.

أن الهدف الأول من التوصل إلى معادلة الانحدار بين متغيرين هو التنبؤ بطريقة أكثر دقة بقيمة أحد المتغيرين باستخدام قيمة المتغير الأخر. فمثلا ،إذا استطعنا تحديد العلاقة بين المعدلات التراكمية للطلبة فى المرحلة الثانوية ومن معدلاتهم التراكمية فى الجامعة ، فإنه يمكننا أن نقدر بطريقة أكثر دقة معدل الطالب التراكمى فى الجامعة باستخدام معدلة التراكمى فى المرحلة الثانوية.

وبعد استخدام البيانات المتاحة عن المتغيرين للتوصل إلى معادلة الانحدار، فإننا سنحاول تحديد درجة قوة هذه العلاقة. وهذا يتطلب استخدام أساليب تحليل الارتباط التى تتناول بالدراسة درجة قوة العلاقة الخطية بين متغيرين.

معادلة انحدار خطية

يهتم هذا الجزء بالانحدار الخطى البسيط حيث نناقش أشكال الانتشار التى تظهر لنا شكل العلاقة بين المتغيرين. وستستخدم طريقة المربعات الصغرى للتوصل إلى معادلة الانحدار. وبمجرد الحصول على هذه المعادلة سنقوم بالاستدلال عن الميل الحقيقى للخط المستقيم مستخدمين فى ذلك الميل ب المحسوب من بيانات العينة . كما نقوم بتقدير قيم المتغير التابع ص باستخدام قيم المتغير المستقل س.

شكل الانتشار

يعتبر التوقيع البيانى لبيانات العينة الخطوة الأولى فى التوصل إلى معادلة الانحدار. ويمدنا شكل الانتشار بصورة مرئية عن العلاقة بين المتغيرين كما يساعد فى تحديد نوع المعادلة التى تناسب البيانات المتاحة. وللحصول على شكل الانتشار يستخدم المحور الأفقى لتمثيل المتغير المستقل س ويستخدم المحور الرأسى لتمثيل المتغير التابع ص وبالتالى نحصل على شكل بيانى ذى بعدين . ويمثل كل زوج من القيم المشاهدة بنقطة (س ، ص) فى المستوى

افترض أن مدير الأفراد بإحدى الشركات يريد تحليل العلاقة بين مستوى أداء العاملين بالشركة ص ومعدلهم التراكمي فى المرحلة الثانوية س حيث يعتقد البعض بوجود علاقة موجبة بينهما. افترض أننا حصلنا على أزواج القيم المشاهدة لهذين المتغيرين من عينة عشوائية مكونة من 20 موظفا بالشركة (جدول (4-1)) وأن أحد أهداف تحليل هذه البيانات هو التنبؤ بقيمة ص بمعرفة قيمة س المناظرة.

جدول (4-1)

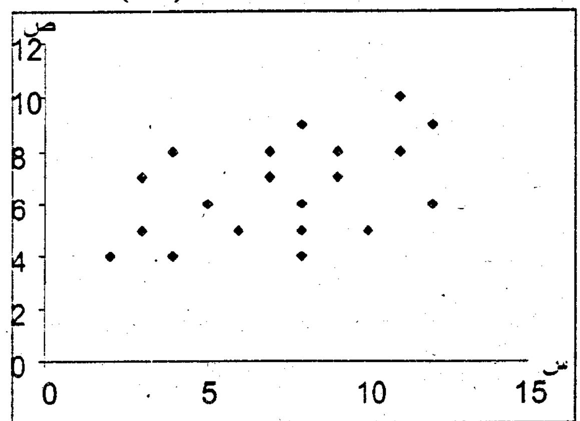
مستوى أداء 20 من العاملين مع معدلاتهم التراكمية فى المرحلة الثانوية

الموظف	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
المعدل التراكمى	3	2	4	12	11	8	9	7	6	5	4	8	3	12	9	8	11	7	8	10
مستوى الأداء	5	4	4	9	8	9	7	8	5	6	8	4	7	6	8	5	10	7	6	5

يتضح لنا من شكل انتشار هذه البيانات المبين فى شكل (4-1) وجود علاقة خطية موجبة بين س ، ص. وهذا يعنى ترافق قيم ص الصغيرة مع قيم س الصغيرة

وترافق قيم ص الكبيرة مع قيم س الكبيرة وأنة من الممكن توفيق خط مستقيم لهذه البيانات يبدأ من الركن الأيسر السفلى وينتهى عند الركن الأيمن العلوى.

شكل (4-1)
شكل انتشار بيانات جدول (4-1)



وحيث أنه من الواضح أن العلاقة بين المتغيرين علاقة خطية فأنة يجب التوصل إلى الخط المستقيم الذى يلائم البيانات الموجودة فى شكل الانتشار. ولا تضمن طريقة التمهيد باليد التوصل إلى أفضل خط مستقيم يلائم البيانات المتاحة.

طريقة المربعات الصغرى

حيث أننا نريد خطأ واحد فقط ، فان هدفنا الأول هو اختبار "أفضل" خط ملائم للبيانات وهنا نحتاج للتعرف على معيار معين يمكن استخدامه لتحديد "أفضل" خط ملائم للبيانات.

إن المعيار الشائع الاستخدام فى هذا المعيار فى توفيق أزواج المشاهدات بطريقة المربعات الصغرى. وباختصار يتطلب معيار المربعات الصغرى توفيق

البيانات المتاحة بخط بحيث تكون مربعات الأبعاد الرأسية لنقاط شكل الانتشار عن هذا الخط أقل ما يمكن وعموما إذا كان لدينا عدد ن من المشاهدات ، فان معيار المربعات الصغرى يتطلب تدنيه مجموع المربعات

مجـ [ص – (أ + ب س)]^2

وبالتالى فان أى خط يحقق هذا المعيار يسمى خط المربعات الصغرى. لذا فان التوفيق باستخدام طريقة المربعات الصغرى يعتبر "أفضل" توفيق لأنة يؤدى إلى تدنيه مجموع مربعات انحرافات المشاهدات عن الخط. وفى خط الانحدار

ص = أ + ب س

تستخدم المشاهدات لتقدير الجزء المقطوع من المحور الرأسى أ وميل الخط المستقيم ب. ويسمى الجزء المقطوع وميل الخط المستقيم بمعالم خط الانحدار المجهولة والتى يجب تقديرها باستخدام البيانات العينة. ومن الواضح أن أى خط مستقيم يتم تحديده بمعرفة قيمة كل من أ ، ب.

ويتم الحصول على قيمتى أ ، ب اللتان تجعلان مجموع مربعات الانحرافات أقل ما يمكن بحل المعادلتين التاليتين اللتان تسميان "المعادلات المعتادة"

مجـ ص = ن أ + ب مجـ س ....(2)

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ س^2 ....(3)

وهنا فان ن تشير إلى عدد أزواج القيم. وباستثناء كل من أ ، ب يمكن الحصول على جميع مقادير المعادلتين السابقتين من بيانات العينة وبالتالى يمكن حساب قيمتى أ ، ب. وبالجدير بالذكر أنة يمكن الحصول على معادلة المربعات

الصغرى بإيجاد صيغة رياضية لكل من أ ، ب . وفى الحقيقة يتم الحصول على هاتين الصيغتين بحل المعادلتين (2) ، (3) لنحصل على:

$$ب = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س)\ (مجـ\ ص)}{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

$$أ = \frac{(مجـ\ س^2)\ (مجـ\ ص) - (مجـ\ س)\ (مجـ\ س\ ص)}{ن\ مجـ\ س^2 - (مجـ\ س)^2} = \bar{ص} - ب\ \bar{س} \ldots\ldots(5)$$

المثال الأول:

استخدم المعادلتين (4) ، (5) لتحديد خط انحدار بيانات جدول (4-1)

الحل:

يبين جدول (4-2) التالى الحسابات اللازمة للحصول على هذه المقادير

$ص^2$	$س^2$	س ص	مستوى الأداء ص	المعدل التراكمى س	الموظف
25	9	15	5	3	1
16	4	8	4	2	2
16	16	16	4	4	3
81	144	108	9	12	4
64	121	88	8	11	5
81	64	72	9	8	6
49	81	63	7	9	7
64	49	56	8	7	8
25	36	30	5	6	9
36	25	30	6	5	10
64	16	32	8	4	11
16	64	32	4	8	12
49	9	21	8	3	13

الموظف	المعدل التراكمى س	مستوى الأداء ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
14	12	6	72	144	36
15	9	8	72	81	64
16	8	5	40	64	25
17	11	10	110	121	100
18	7	7	49	49	49
19	8	6	48	64	36
20	10	5	50	100	25
ن = 20	مجـ س = 147	مجـ ص = 131	مجـ س ص 1012	مجـ $س^2$ = 1261	مجـ $ص^2$ = 921

يتم حساب قيمة كل من أ ، ب بالاستخدام المباشر للمعادلتين (4) ، (5) كما يلى:

$$أ = \frac{(1012)(147) - (131)(1261)}{20(1261) - (147)^2} = \frac{148764 - 165191}{25220 - 21609}$$

$$= \frac{16427}{3611} = 4.55$$

$$ب = \frac{20(1012) - (147)(131)}{20(1261) - (147)^2} = \frac{20240 - 19257}{25220} = \frac{983}{3611} = 0.27$$

لذا فان معادلة المربعات الصغرى هى

ص = 4.55 + 0.27 س

وبمجرد الحصول على خط المربعات الصغرى ، يمكننا التنبؤ بمستوى أدائه باستخدام خط المربعات الصغرى بعد ضع س = 10 لنحصل على

صم = 4.55 + 0.27 (10) = 7.25

حيث تشير $\hat{ص}$ إلى قيمة ص المحسوبة من خط المربعات الصغرى. لاحظ أن درجة مستوى الأداء 7.25 هى الدرجة المتوقعة المناظرة لمعدل تراكمى يساوى 10

إن خط الانحدار الذى حصلنا علية سابقا هو خط الانحدار العينة لأننا حصلنا علية باستخدام بيانات العينة. ومن الواضح أنه عند الحصول على عينة عشوائية أخرى من 20 من العاملين ، فإننا سنحصل غالبا على قيمة أخرى لكل من أ ، ب وبالتالى نحصل على خط انحدار مختلف. افترض أن خط الانحدار الحقيقى ، أى خط انحدار المجتمع يمكن التعبير عنة كما يلى:

$$\mu_{ص/س} = \alpha + \beta \text{ س} \quad \text{...(6)}$$

حيث تشير $\mu_{ص/س}$ إلى متوسط المجتمع لقيم ص المناظرة لقيمة معينة س ، α إلى الجزء المقطوع لخط الانحدار الحقيقى ، β إلى ميل هذا الخط. وهنا فإننا نستخدم قيمة أ كتقدير للمعلمة α ، كما نستخدم قيمة ب كتقدير للمعلمة β.

وباختصار يستخدم الخط ص = أ – ب س لتقدير خط الانحدار الحقيقى

$$\mu_{ص/س} = \alpha + \beta \text{ س}$$

الاستدلال عن معامل الانحدار β

سنحاول فى هذا الجزء مراجعة كيفية حساب الانحراف المعيارى لقيم ص المناظرة لقيمة معينة من قيم س ، كما سنجرى اختبارات الفروض ونوجد فترات الثقة الخاصة بمعامل الانحدار β.

حساب الانحراف المعياري لقيم ص المناظرة لقيمة معينة من قيم س

عند أية قيمة من قيم س ، تختلف قيم ص المناظرة بطريقة عشوائية. وهذه القيم لها توزيع أخر لى متوسطة $\mu_{ص.س}$ وانحرافة المعيارى $\alpha_{ص/س}$ وسنفرض هنا أن توزيع قيم ص المناظرة لقيمة معينة من قيم س هو توزيع معتدل.

ويقدر المتوسط الشرطى $\mu_{ص.س}$ باستخدام $ص_م$ وهى قيمة ص المحسوبة التى تقع على خط انحدار العينة. كذلك يقدر الانحراف المعيارى $\alpha_{ص.س}$ باستخدام $ع_{ص.س}$ وهو الانحراف المعيارى لقيم ص المناظرة لقيمة معينة من قيم س ويعبر عن $ع_{ص.س}$ باستخدام الصيغة

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{مجـ (ص - ص_م)^2}{ن - 2}} \quad ....(7)$$

وغالبا ما يتم حساب $ع_{ص/س}$ باستخدام الصيغة التالية:

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{مجـ ص^2 - أ\ مجـ ص - ب\ مجـ س ص}{ن - 2}} \quad ....(8)$$

المثال الثانى

استخدمت بيانات جدول (2-4) لحساب $ع_{ص/س}$ ، الانحراف المعيارى لقيم ص المشاهدة على خط انحدار العينة ، المناظرة لقيم س المختلفة

الحل:

باستخدام قيمتى أ ، ب الموجودتين فى المثال الأول وبيانات جدول (2-4) مع المعادلة (8) ، نجد أن

$$ع_{ص/س} = \sqrt{\frac{921 - 4.55(131) - 0.27(1012)}{20 - 2}} = \sqrt{\frac{51.71}{18}} = 1.695$$

اختبارات الفروض وفترات الثقة للمعلمة β

يعتمد الاستدلال عن معلمة خط الانحدار β على ب ، مقدر هذه المعلمة الذى نحصل عليها من العينة. وسنفترض هنا أن توزيع ب معتدل بمتوسط β وانحراف معيارى $\sigma_{ب}$. وعادة ما تكون قيمة $\sigma_{ب}$ مجهولة ويجب الحصول على تقدير لها وتقدر $\sigma_{ب}$ باستخدام $ع_{ب}$ حيث

$$ع_{ب} = \frac{ع_{ص/س}}{\sqrt{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}} \quad \text{.................................... (9)}$$

ونتيجة لأن حجم العينة $ن$ عادة ما يكون صغيرا وأننا استخدمنا $ع_{ب}$ بدلا من $\sigma_{ب}$ ، فإننا نستخدم توزيع ت بدلا من التوزيع المعتدل المعيارى للاستدلال على المعلمة β.

وقاعدة القرار المناظرة للاختبار

$ض_0$: β = صفر $\qquad\qquad$ $ض_1$: β ≠ صفر

هى رفض $ض_0$ إذا كانت

$$ت \geq ت_{(ن-2 \text{ ، } \frac{\alpha}{2})}$$

أو إذا كانت

$$ت \leq -ت_{(ن-2 \text{ ، } \frac{\alpha}{2})}$$

ويحتسب إحصائية الاختبار ت كما يلى

$$\text{ت} = \frac{\text{ب} - \beta}{\text{ع}_{\text{ب}}} \qquad \ldots\ldots\ldots (10)$$

وتقارن قيمة ت المحسوبة بالقيمة الحرجة ت المستخرجة من جداول ت الموجودة بملحق هـ وبالمثل ، نجد أن فترة الثقة ($1-\alpha$) للمعلمة β هى

$$\text{ب} - \text{ت}_{(\frac{\alpha}{2}،\ \text{ن}-2)} \cdot \text{ع}_{\text{ب}} < \beta < \text{ب} + \text{ت}_{(\frac{\alpha}{2}،\ \text{ن}-2)} \cdot \text{ع}_{\text{ب}} \qquad \ldots\ldots\ldots (11)$$

وإذا كان حجم العينة كبيرا بدرجة كافية فان توزيع إحصائية الاختبار ت يقترب من التوزيع المعتدل المعيارى. وبالتالى يستخدم التوزيع المعتدل المعيارى لإجراء اختبارات الفروض وإيجاد فترات الثقة للمعلمة β إذا كان حجم العينة ن كبيرا بدرجة كافية

المثال الثالث

بالإشارة إلى المثال الأول وجدول (4-1) ، هل تدل البيانات المتاحة على اختلاف قيمة المعلمة β. عن الصفر عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

فى هذه الحالة نجد أن فرض العدم والفرض البديل هما:

$\text{ض}_0: \beta = \text{صفر}$ $\qquad$ $\text{ض}_1: \beta \neq \text{صفر}$

لاحظ أن الاختبار ذو طرفين . وحيث أن $\text{ن} = 20$ ، $\alpha = 0.05$ فان

قاعدة القرار هى:

رفض ض. عندما تكون

$$\text{ت} \geq \text{ت}_{(0.025 ،\ 18)} = 2.101$$

أو عندما تكون

$$\text{ت} \leq -2.101$$

من المثال الثانى نجد أن $\text{ع}_{\text{ص}/\text{س}} = 1.695$. وباستخدام بيانات جدول (4-2) والمعادلة (9) نجد أن:

$$ع_ب = \frac{1.695}{\sqrt{1261 - \frac{(147)^2}{20}}} = \frac{1.695}{\sqrt{1261 - 1080.45}}$$

$$= \frac{1.695}{13.436} = 0.126$$

وحيث أن قيمة ب المشاهدة تساوى 0.27 ، فإن قيمة ت المحسوبة هى

$$ت = \frac{0.27}{0.126} = 2.143$$

ويلاحظ أن قيمة ت أكبر من 2.101 . لذا يرفض فرض العدم ض. فى مقابل الفرض البديل ض$_1$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ أى أن بيانات العينة تدل بدرجة كافية عند $\alpha = 0.05$ على أن معامل انحدار المعدل التراكمى يختلف عن الصفر

المثال الرابع:

بالإشارة إلى الأمثلة السابقة ، أوجد فترة ثقة 95% لمعامل الانحدار β

يتبين لنا من المثال الأول أن ب = 0.27 ، كما تبين لنا من المثال السابق أن ع$_ب$ = 0.126 أيضا نجد أن ت$_{(18 ، 0.025)}$ = 2.101

وباستخدام المعادلة (11) نجد أن فترة الثقة 95% للمعلمة β هى

$$0.27 - 0.2647 < \beta < 0.27 + 2.101\ (0.126)$$

$$0.27 - 0.2647 < \beta < 0.27 + 0.2647$$

$$0.0053 < \beta < 0.5247$$

تقدير المتوسط الشرطى $\mu_{ص/س}$

يعتبر تقدير المتوسط الشرطى $\mu_{ص/س}$ أمرا هاما فى الكثير من المشاكل العملية فى الاقتصاد والإدارة. فإذا كانت مبيعات احدى الشركات ص مرتبطة

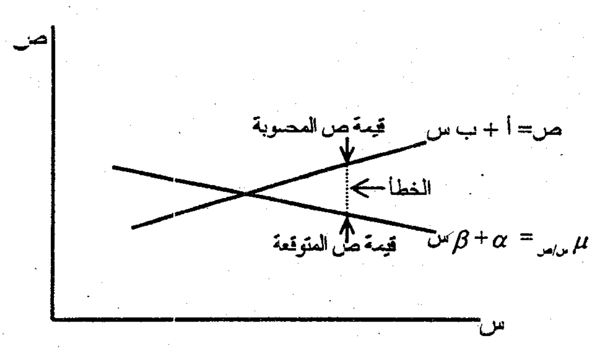
بمصاريف الإعلان س ، فإنه يمكن تقدير متوسط المبيعات المناظر لمبلغ محدد للإعلان. كذلك إذا كان مستوى أداء العاملين ص مرتبطان بدرجات اختبار القدرات س ، فإنه يمكن تقدير متوسط مستوى الأداء المناظر لدرجة معينة س. أيضا إذا كان المعدل التراكمي لطلبة الجامعة مرتبطا بمعدلهم التراكمي في مرحلة الثانوية ، فإنه يمكن تقدير متوسط المعدل التراكمي في الجامعة المناظر لمعدل تراكمي في مرحلة الثانوية. إن هدفنا هنا هو الحصول على فترة ثقة للمتوسط الشرطي للمتغير ص عند قيمة محددة للمتغير س ، أي أننا نرغب في التوصل إلى فترة ثقة للمعلمين $\mu_{ص.س}$

والجدير بالذكر أن $\hat{ص}$ مقدر غير متحيز للمعلمة $\mu_{ص.س}$. وسنفترض هنا أن التوزيع العيني للمقدر $\hat{ص}$ معتدل بمتوسط $\mu_{ص.س}$ وانحراف معياري $\sigma_{\hat{ص}}$ ويتم تقدير $\sigma_{\hat{ص}}$ باستخدام $ع_{\hat{ص}}$ حيث

$$ع_{\hat{ص}} = ع_{ص/س} \sqrt{\frac{1}{ن} + \frac{(س_{0} - \bar{س})^2}{مج س^2 - \frac{(مج س)^2}{ن}}} \qquad \text{.............................(12)}$$

لاحظ أن $ع_{\hat{ص}}$ هو الانحراف المعياري لقيم $\hat{ص}$ عن خط انحدار المجتمع ، وأن $ع_{ص/س}$ هو الانحراف المعياري لقيم ص عن خط إنحدار العينة. ويبين شكل (4-2) قيمة $\hat{ص}$ المحسوبة من قيمة ص المتوقعة $\mu_{ص/س}$ ، عند كل قيمة من قيم س. أما البعد الرأسي بين $\hat{ص}$ وبين $\mu_{ص/س}$ فانه يمثل خطأ المعاينة.

شكل (4-2)
قيم ص المحسوبة والمتوقعة



وحيث أن حجم العينة ن يكون صغيرا فى العادة وأننا استخدمنا $ع_{ص.س}$ لتقدير $\sigma_{ص.س}$ ، فإننا نستخدم توزيع ت لإيجاد فترة الثقة $(1-\alpha)$ للمتوسط $\mu_{ص.س}$ كما يلى:

$$ص_م - ت_{(ن-2 ، \frac{\alpha}{2})} . ع_{ص_م} < \mu_{ص.س} < ص_م + ت_{(ن-2 ، \frac{\alpha}{2})} . ع_{ص_م} \quad ....(13)$$

المثال الخامس

استخدم بيانات الجدول (4-2) لايجد فترة ثقة 95% لقيمة ص المتوقعة أى للمعلمة $\mu_{ص/س}$ عند

(1) س = 4 (2) س = 7.35 (3) س = 10

بوضع كل قيمة من قيم س السابقة فى المعادلة

$ص_م = 4.55 + 0.27$ س ، نحصل على قيمة ص المناظرة ويبين الجدول التالى هذه القيم بالإضافة إلى قيم المقادير الأخرى اللازمة لحل هذا المثال علما بأن $\bar{س} = \frac{147}{20} = 7.53$

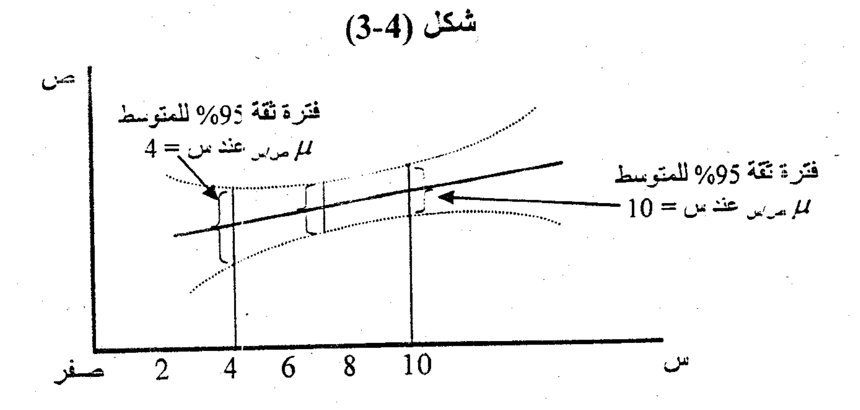
س	صم	ع ص م	$ت_{(0.025 ، 18)}$	$\sqrt{\frac{1}{ن} + \frac{(س - \bar{س})^2}{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}}$
4	5.63	1.695	2.101	$\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{11.225}{180.55}} = 0.3349$
7.53	6.5345	1.695	2.101	$\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{صفر}{180.55}} = 0.2236$
10	7.25	1.695	2.101	$\sqrt{\frac{1}{20} + \frac{7.0225}{180.55}} = 0.2982$

وبوضع هذه الكميات في المعادلة (13) نحصل على فترات الثقة المناظرة وهي على التوالي:

$$4.437 < \mu_{ص/س} < 6.823 \quad (1)$$
$$5.738 < \mu_{ص/س} < 7.331 \quad (2)$$
$$6.188 < \mu_{ص/س} < 8.312 \quad (3)$$

لاحظ أن فترة الثقة تزداد اتساعا كلما ابتعدت قيمة س عن $\bar{س}$. وهذا يعني أن تقدير المتوسط الشرطي يقل الاعتماد عليه كلما ابتعدت قيمة س عن $\bar{س}$. وتتضح هذه الحقيقة من صياغة $ع_{ص م}$ في المعادلة (12)، حيث يتبين لنا أن أقل قيمة للانحراف المعياري $ع_{ص م}$ تحدث عند س = $\bar{س}$، وأن قيمته تزداد كبرا كلما ازدادت س ابتعادا عن $\bar{س}$. ويبين شكل (4-3) التالي هذه الحقيقة

شكل (4-3)



التنبؤ بالقيمة الفعلية صن

نذكر أن μ ص/س هو المتوسط الشرطى للمتغير ص عند قيمة معينة من قيم س. وغالبا ما نحتاج إلى التنبؤ بقيمة فعلية للمتغير ص. فمثلا ، قد يرغب أحد المزارعين فى التنبؤ بمحصول القمح ص فى سنة معينة عند استخدامه لكمية محددة س من الأسمدة الكيماوية. كما قد يرغب رئيس إحدى الشركات فى التنبؤ بالمبيعات ص خلال الربع التالى عند مبلغ محدد لمصروفات الإعلان س. ومن البساطة بمكان إيجاد تقدير للقيمة المطلوبة فى هذه الحالة. فكل ما يجب عملة هو وضع قيمة س المحددة فى معادلة خط انحدار العينة وقيمة صم التى نحصل عليها هنا هى قيمة صن التى تنبئنا بها.

من الواضح أن الخطأ المناظر للتنبؤ بقيمة ص الفعلية أكبر من الخطأ المناظر لتقدير المتوسط الشرطى للمتغير ص ، لأن تباين مقدر القيمة صن أكبر من تباين مقدر المتوسط الشرطى μ ص/س . كما يتضح من شكل (4-4) نجد أن الفرق بين صم وبين صن أكبر عموما من الفرق بين صم وبين μ ص/س . فإذا رمزنا للانحراف المعيارى لمقدر القيمة الفعلية صن بالرمز σ صن فإننا نجد أن

$\sigma_{\text{ص}_م}$ أكبر من $\sigma_{\text{ص}_م}$. وهنا فإن $\sigma_{\text{ص}_م}$ تشير إلى الانحراف المعياري لمقدر المتوسط الشرطي $\mu_{\text{ص/س}}$. ويعبر عن $\sigma_{\text{ص}_م}$ كما يلي :

$$\sigma_{\text{ص}_م} = \sigma_{\text{ص/س}} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{ن}} + \frac{(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}}} \qquad \text{.............(14)}$$

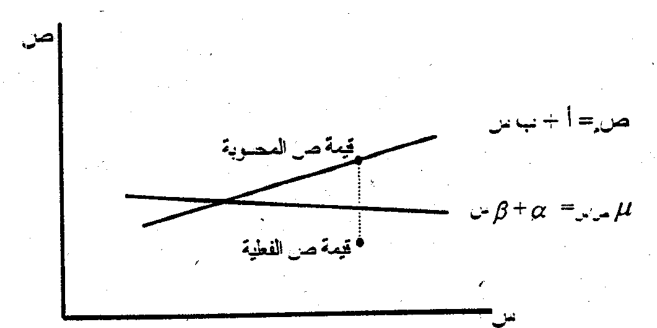
ومقدر النقطة لهذا الانحراف المعياري

$$\text{ع}_{\text{ص}_م} = \text{ع}_{\text{ص/س}} \sqrt{1 + \frac{1}{\text{ن}} + \frac{(\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}}} \qquad \text{.................(15)}$$

لذا ، فإن فترة التنبؤ $(1 - \alpha)$ للقيمة $\text{ص}_\text{ن}$ هي

$$\text{ص}_م - \text{ت}_{(\frac{\alpha}{2}\text{، ن} - 2)}\, \text{ع}_{\text{ص}_م} < \text{ص}_\text{ن} < \text{ص}_م + \text{ت}_{(\frac{\alpha}{2}\text{، ن} - 2)}\, \text{ع}_{\text{ص}_م} \;...(16)$$

شكل (4-4)
قيمة ص الفعلية وقيمة ص المحسوبة



المثال السادس

بالإشارة إلى المثال الخامس ، وجدول (4-2) ، افترض أن المعدل التراكمي في المرحلة الثانوية لأحد العاملين هو س = 10. أوجد فترة تنبؤ 95% للدرجة الفعلية التي حصل عليها هذا الشخص في التقييم القادم لمستوى الأداء.

عند س= 10 نجد أن $ص_م = 4.55 + 0.27\,(10) = 7.25$

أيضا نجد أن $ت_{(0.025 ، 18)} = 2.101$

وأن $ع_{م} = 1.695\sqrt{1 + \frac{1}{20} + \frac{(7.35 - 10)^2}{180.55}} = 1.7687$

باستخدام المعادلة (16) نحصل على فترة تنبؤ 95% للقيمة الفعلية صن

وهى $7.25 - 2.101\,(1.7687) <$ صن $< 7.25 + 2.101\,(1.7687)$

أى أن

$3.534 <$ صن < 10.966

لاحظ أن فترة التنبؤ التى حصلنا عليها هنا أكثر اتساعا من فترة الثقة التى حصلنا عليها من المثال الخامس.

الارتبـاط البسيط "Simple Correlation"

يمكننا الآن أن نتساءل عن درجة دقة التنبؤ بقيمة ص عند استخدام معادلة المربعات الصغرى. تعتمد درجة دقة التنبؤ على مدى قوة العلاقة بين س ، ص ، أى على مدى قوة الارتباط بين المتغيرين. فإذا لم يكن الارتباط معنويا ، فإن درجة دقة التنبؤ باستخدام طريقة المربعات الصغرى لا تكون مرتفعة. أما إذا كان الارتباط قويا ، أى إذا كان خط المربعات الصغرى قريبا من جميع نقاط خط الانتشار ، فإن درجة دقة التنبؤ تكون عالية.

ويستخدم معامل الارتباط (ر) لقياس درجة قوة العلاقة بين متغيرين باستخدام بيانات عينة عشوائية مكونة من ن من أزواج المشاهدات. وسنحاول فى

هذا الجزء إيضاح مفهوم معامل الارتباط ، واستخدام معامل ارتباط العينة ر لاختبار فرض العدم عن معامل ارتباط المجتمع ρ.

معامل الارتباط

نتوقع أن يكون استخدام خط المربعات الصغرى للتنبؤ بقيم ص أكثر دقة من عدم استخدامه ، أى أن استخدام قيم س للتنبؤ بقيم ص يعطى نتائج أكثر دقة من عدم استخدامها. وهذا يعنى أن تشتت المتغير العشوائى ص قد انخفض نتيجة لاستخدام خط انحدار ص على س . ويمكن التعبير عن نسبة التخفيض فى تشتت قيم صلا الناتج من استخدام خط انحدار ص على س كما يلى :

$$\frac{\text{مجـ}(\text{ص}_\text{م} - \bar{\text{ص}})^2}{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2} = \frac{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2} = \frac{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}}_\text{م})^2}{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2} \quad \ldots\ldots (17)$$

وعادة ما يستخدم الرمز (ر^2) للإشارة إلى الطرف الأيسر للمعادلة السابقة أى أن :

$$\text{ر}^2 = 1 - \frac{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}}_\text{م})^2}{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2} \quad \ldots\ldots (18)$$

أى أن ر^2 هو نسبة التغير فى ص الذى يمكن تفسيره بالعلاقة بين ص ، س أى نسبة التغير المفسر فى ص. ويسمى ر^2 ، عادة ، معامل التحديد. ويسمى الجذر التربيعى لمعامل التحديد ر^2 ، وهو ر ، بمعامل الارتباط . أى أن

$$\text{ر} = \sqrt{1 - \frac{\text{مجـ}(\text{ص} - \text{ص}_\text{م})^2}{\text{مجـ}(\text{ص} - \bar{\text{ص}})^2}} \quad \ldots\ldots (19)$$

ومن النـادر استخدام الطريقـة الـسابقة لحـساب قيمـة ر وغالبـا مـا تـستخدم الصيغة التالية:

$$ر = \frac{ن\ مجـ\ س\ ص - (مجـ\ س)\ (مجـ\ ص)}{\sqrt{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}} \quad \ldots\ldots (20)$$

ويبـين جـدول (4-2) جميـع الكميـات اللازمـة لحـساب ر باسـتخدام هـذه الصيغة وباستخدام المعادلة (20) مع بيانات جدول (4-2) نجد أن

$$ر = \frac{20\ (1012) - (147)\ (131)}{\sqrt{20\ (1261) - (147)^2}\ \sqrt{20\ (921) - (131)^2}}$$

$$ر = \frac{20240 - 19257}{\sqrt{25220 - 21609}\ \sqrt{18420 - 17161}}$$

$$ر = \frac{983}{\sqrt{3611}\ \sqrt{1259}} = \frac{983}{\sqrt{4546249}} = \frac{983}{2132.2} = 0.461$$

إذا كـان الارتبـاط بـين س ، ص قويـا ، فـإن أغلـب التغيـر فـى ص يمكـن إرجاعه للتغير فى س. وفى هذه الحالـة نجد أن قيمـة ر قريبـة من الواحد الـصحيح وتنحصر بين +1، -1 . وإذا كان الارتباط بين س، ص ضـعيفا فإن نـسبة صـغيرة من التغير فى ص يمكن إرجاعها إلى العلاقة مع س وفى هذه الحالـة تكون قيمـة ر قريبة من الصفر.

اختبارات الفروض "Testing Hypotheses"

فى كثير من الأحيـان ، نرغـب فـى معرفـة مـا إذا كـان قيمـة معامل ارتبـاط العينـة ر كبيـرة بدرجـة تكفـى للقول بوجـود علاقـة قويـة بين أزواج قـيم مـشاهدات المجتمـع ، أو أن قيمـة ر راجعـة للـصدفة ولا تـدل علـى وجـود هـذه العلاقـة القويـة.

وبعنى أخر ، نرغب أحيانا فى اختبار فرض العد القائل بأن معامل ارتباط المجتمع ρ يساوى الصفر ، فى مقابل الفرض البديل القائل بأنة يختلف معنويا عن الصفر.

وبافتراض أن توزيع كل من س ، ص معتدل أو قريب من الاعتدال ، يمكن استخدام توزيع ت لاختبار فرض العدم عم معامل ارتباط المجتمع ρ . وفى هذه الحالة تعرف إحصائية الاختبار كما يلى :

$$ت = ر \sqrt{\frac{ن - 2}{1 - ر^2}} \quad \text{...} \quad (21)$$

وتتبع إحصائية الاختبار توزيع ت بدرجات حرية (ن – 2). أما إذا لم يتحقق فرض بتعبة كل من س ، ص للتوزيع المعتدل ، فانه يمكن استخدام اختبار أخر يسمى اختبار الرتب.

المثال السابع

بالإشارة إلى قيمة معامل ارتباط العينة ر المحسوبة سابقا ، اختبر فرض العدم القائل بأن معامل ارتباط المجتمع ρ يساوى الصفر عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

من الواضح أن هذا اختبار ذو طرفين ، وأن

ض.: ρ = صفر ض$_1$: $\rho \neq$ الصفر

وحيث أن مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ ، وأن درجات الحرية هى 20–2 = 18 فإن قيمة ت الحرجة المستخرجة من جداول ت تساوى = 2.101 وفى هذه الحالة نجد أن قاعدة القرار هى :

رفض ض. عندما تكون ت $\geq$ 2.101

أو عندما تكون $\text{ت} \leq -2.101$

وحيث أن ر = 0.461 وباستخدام المعادلة (21) نجد أن:

$$\text{ت} = 0.461\sqrt{\frac{20-2}{1-(0.461)^2}} = 0.461\sqrt{\frac{18}{1-0.2125}}$$

$$= 0.461\sqrt{\frac{18}{0.7875}} = 0.461\sqrt{22.86}$$

$$= 0461\ (4.78) \qquad = 2.204$$

وهى أكبر من القيمة الحرجة 2.101 وكنتيجة لذلك ، يرفض فرض العدم ض. عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ وبالتالى لا نستطيع إرجاع قيمة معامل ارتباط العينة ر = 0.461 للصدفة ، أى نستنتج وجود علاقة ارتباط بين س، ص عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

تطبيقات محلولة

1. سحبت عينة عشوائية من عشرة مهندسين لمعرفة العلاقة بين مدة الخبرة س ومستوى الأداء ص فحصلنا على البيانات التالية:

س	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
ص	1	3	2	5	5	4	7	6	9	8

والمطلوب:

(أ) توفيق خط المربعات الصغرى بافتراض أن س هو المتغير المستقل ثم رسم هذا الخط على شكل الانتشار

(ب) تقدير مستوى الأداء إذا كانت مدة الخدمة 10 سنوات

(ج) اختبار فرض العدم القائل بأن معامل الانحدار β يساوى الصفر عند $\alpha=$ 0.02

(د) إيجاد فترة ثقة 98% للمتوسط الشرطى $\mu_{ص/س}$ عند

(1) س = 5   (2) س = 1

(ه) إيجاد فترة تنبؤ 98% للقيمة الفعلية صف عند س= 5 ، س = 1

(و) حساب قيمة معامل الارتباط

(ز) اختبار فرض العدم القائل بعدم بوجود علاقة بين س ، ص عند $\alpha=0.05$

الحل:

س	ص	س ص	$س^2$	$ص^2$
1	1	1	1	1
2	3	6	4	9
3	2	6	[illegible]	4

25	16	20	5	4
25	25	25	5	5
16	25	20	4	5
49	36	42	7	6
36	49	42	6	7
81	64	72	9	8
72	81	72	8	9
318	310	306	50	50

(أ) ب (معامل الانحدار) $= \dfrac{\text{ن مجـ س ص - (مجـ س)(مجـ ص)}}{\text{ن مجـ س}^2 \text{ - (مجـ س)}^2}$

$= \dfrac{(50)\ (50) - (306)10}{^2(50)\ -\ (310)10}$

$0.933 = \dfrac{560}{600} = \dfrac{2500 - 3060}{2500 - 3100} =$

أ $= \bar{\text{ص}}$ - ب $\bar{\text{س}}$ $= 5 - 0.933\ (5)$

$0.3335 = 4.6665 - 5 =$

خط انحدار العينة هو

ص$_\text{م}$ $= 0.3335 + 0.9333$ س

(ب) ص$_\text{م}$ $= 0.3335 + 0.9333\ (10)$

$9.6665 =$

(ج) ع$^2_{\text{ص/س}}$ $= \dfrac{\text{مجـ ص}^2 \text{ – أ مجـ ص – ب مجـ س ص}}{\text{ن} - 2}$

$= \dfrac{(306).9333 - (50)0.3335 - 310}{8}$

$0.9669 = \dfrac{285.5898 - 16.675 - 310}{8} =$

ض. : β = صفر ض$_1$: $\beta \neq$ صفر

$$ت = \frac{ب - \beta}{ع_ب}$$

$$ع_ب = \frac{ع_{ص/س}}{\sqrt{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}} = \frac{\sqrt{0.9669}}{\sqrt{310 - \frac{(50)^2}{10}}}$$

$$\therefore ت = \frac{0.9333 - صفر}{0.1269} = 7.3546$$

$$ت_{(ن-2 ، \alpha/2)} = ت_{(8 ، 0.01)} = 2.896$$

7.3546

2.896- 2.896

وحيث أن إحصائية الاختبار ت = 7.3546 أكبر من القيمة الحرجة 2.896 لذا فإننا نرفض فرض العدم عند مستوى معنوية α=0.02

(د) فترة ثقة للمتوسط الشرطى $\mu_{ص/س}$ بدرجة ثقة 98% هى:

$$ص_م - ت_{(ن-2 ، \alpha/2)} \cdot ع_{ص_م} < \mu_{ص/س} < ص_م + ت_{(ن-2 ، \alpha/2)} \cdot ع_{ص_م}$$

بوضع س = 5 ، س = 1 فى المعادلة

$$ص_م = 0.3335 - 0.9333 س$$

عند س = 5 $\quad ص_م = 0.3335 + 0.9333 (5) = 5$

عند س = 1 $\quad ص_م = 0.3335 + 0.9333 (1) = 1.2668$

$$\bar{س} = \frac{50}{10} = 5$$

ويبين الجدول التالى قيم المقادير اللازمة لإيجاد فترات الثقة

$\sqrt{\frac{1}{ن} + \frac{(س - \bar{س})^2}{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}}$	$ع_{ص/س}$	$ت_{(0.01 ، 8)}$	$ص_م$	س
$\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{5 - 5}{310 - \frac{(50)^2}{10}}} = 0.3162$	0.9833	2.896	5	5
$\sqrt{\frac{1}{10} + \frac{5 - 1}{310 - \frac{(50)^2}{10}}} = 0.6055$	0.9833	2.896	1.2668	1

وبوضع هذه الكميات فى المعادلة (13) نحصل على فترات الثقة المناظرة وهى:

عند س = 5 $\qquad 4.099 < \mu_{ص/س} < 5.901$

طول فترة الثقة = 5.901 – 4.099 = 1.802

عند س = 1 $\qquad -0.4563 < \mu_{ص/س} < 2.9899$

طول فترة الثقة = 2.9899 + 0.4563 = 3.4462

كلما بعدت قيمة س عن $\bar{س}$ كلما زادت طول فترة الثقة اتساعا نتيجة لزيادة التباين وبالتالى تزايد الأخطاء.

(هـ) فترة التنبؤ 98% للقيمة الفعلية صف هى

$$ص_م - ت_{(ن-2 ، \frac{ه}{2})} \bar{ع}_{ص} < ص_ف < ص_م + ت_{(ن-2 ، \frac{ه}{2})} \bar{ع}_{ص}$$

$ص_م = 5$ $\qquad$ عند س = 5

$ص_م = 2.2668$ $\qquad$ عند س = 1

$$ع_{ص_ى} = ع_{ص/س} \sqrt{1 + \frac{1}{ن} + \frac{(س - \bar{س})^2}{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}}$$

عند س = 5

$$ع_{ص_ى} = 0.9833 \sqrt{1 - \frac{1}{10} + \frac{(5-5)^2}{310 - \frac{(5)^2}{5}}}$$

$$= 0.9833 \sqrt{1.1}$$

$$= 0.9833\ (1.0488) = 1.0313$$

فترة التنبؤ 98% هى:

$$5 \pm ت_{(8 \text{ ، } 0.01)}\ (1.0313)$$

أى 5 ± 2.9858

ويكون الحد الأدنى هو $5 - 2.9858 = 2.0142$

ويكون الحد الأعلى هو $5 + 2.9858 = 7.9858$

أى أن $2.0142 < ص_ى < 7.9858$

طول فترة التنبؤ هى $7.9858 - 2.0142 = 5.9716$

عند س = 1

$$ع_{ص_ى} = 0.9833 \sqrt{1 - \frac{1}{10} + \frac{(5-1)^2}{310 - \frac{(5)^2}{5}}}$$

$$= 0.9833 \sqrt{1.3667}$$

$$= 0.9833\ (1.1690) = 1.1495$$

فترة التنبؤ 98% هى:

$$1.2668 \pm ت_{(0.01 ، 8)}\ (1.1495)$$

أى $1.2668 \pm 2.898\ (1.1495)$

$$1.2668 \pm 3.3304$$

ويكون الحد الأدنى هو $1.2668 - 3.3304 = -2.0636$

ويكون الحد الأعلى هو $1.2668 + 3.3304 = 4.5972$

أى أن $-2.0636 < ص_ى < 4.5972$

طول فترة التنبؤ 98% هو

$$4.5972 - (-2.0636) = 6.6608$$

(و) $$ر = \frac{مجـ س ص - \frac{(مجـ س)(مجـ ص)}{ن}}{\sqrt{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}\sqrt{مجـ ص^2 - \frac{(مجـ ص)^2}{ن}}}$$

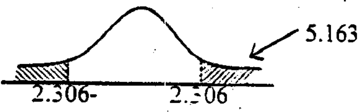
$$= \frac{306 - \frac{(50)(50)}{10}}{\sqrt{310 - \frac{(50)^2}{10}}\sqrt{318 - \frac{(50)^2}{10}}}$$

$$= \frac{306 - 250}{\sqrt{310 - 250}\sqrt{318 - 250}} = \frac{56}{63.875} = 0.877$$

∴ توجد علاقة طردية بين س ، ص

ض.: ρ = صفر ض$_1$: ρ ≠ صفر

وحيث أن مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$ وأن درجات الحرية هى 8 فإن قيمة ت الحرجة المستخرجة من جداول ملحق هـ تساوى ±2.306.



وفى هذه الحالة نجد أن قاعدة القرار هى:

رفض ض. عندما تكون ت ≥ 2.306

أو عندما تكون ت ≤ – 2.306

وحيث أن ر = 0.877 وباستخدام المعادلة (21) نجد أن:

$$ت = 0.877 \sqrt{\frac{10 - 2}{1 - (0.877)^2}} = 0.877 \sqrt{\frac{8}{1 - 0.76913}} = 5.163$$

∴ نرفض فرض العدم ويقبل الفرض البديل القائل بوجود علاقة بين س ، ص عند $\alpha = 0.05$

2. أفترض أن س تمثل درجات اختبار قدرات أى عامل إنتاج وأن ص تمثل إنتاج هذا العامل فى الساعة. البيانات التالية حصلنا عليها من عينة عشوائية من عشرة عمال إنتاج.

ن = 10 مجـ س = 550 مجـ ص = 680

مجـ س ص = 45900 مجـ س^2 = 38500 مجـ ص^2 = 56000

والمطلوب:

(أ) استخدام البيانات السابقة لإيجاد خط انحدار ص على س

(ب) اختبار الفرض القائل بأن معامل الانحدار β يختلف عن الصفر عند $\alpha = 0.02$

(جـ) إيجاد فترة ثقة 98% للمتوسط الشرطى $\mu_{ص/س}$ عند

(1) س = 40 ، (2) س = 55 ، (3) س = 70

(د) إيجاد فترة تنبؤ 98% لقيمة الفعلية صى عند

(1) س = 40 ، (2) س = 55 ، (3) س = 70

(هـ) بيان سبب الفروق الموجودة بين إجابات البند (جـ) وإجابات البند (د)

الحل:

(أ)

$$ب = \frac{ن \text{ مجـ } س ص - (\text{مجـ } س)(\text{مجـ } ص)}{ن \text{ مجـ } س^2 - (\text{مجـ } س)^2}$$

$$= \frac{10(45900) - (550)(680)}{10(38500) - (550)^2}$$

$$= \frac{459000 - 374000}{385000 - 302500} = \frac{85000}{82500} = 1.03$$

$$أ = \bar{ص} - ب \bar{س} = 68 - 1.03(55)$$

$$= 68 - 56.65 = 11.35$$

$$\therefore ص_م = 11.35 + 1.03 \text{ س}$$

(ب)

$$ع^2_{ص/س} = \frac{مجـ ص^2 - أ \ مجـ ص - ب \ مجـ س ص}{ن - 2}$$

$$= \frac{56000 - 11.35(680) - 1.03(45900)}{8}$$

$$= \frac{56000 - 7718 - 47277}{8}$$

$$= \frac{56000 - 54995}{8} = \frac{1005}{8} = 125.625$$

$$ع_{ص/س} = 11.208$$

ض.: β = صفر   ض$_1$: $\beta \neq$ صفر

$$ع_ب = \frac{ع_{ص/س}}{\sqrt{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}} = \frac{11.208}{\sqrt{38500 - \frac{(550)^2}{10}}}$$

$$= \frac{11.208}{\sqrt{8250}} = \frac{11.208}{90.83} = 0.1234$$

$$\therefore ت = \frac{ب - \beta}{ع_ب} = \frac{1.03}{0.1234} = 8.3468$$

$$ت_{(8 ، 0.01)} = 2.896$$

∴ نرفض فرض العدم عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$

(جـ)

$$ر = \frac{ن \ مجـ س ص - (مجـ س) \ (مجـ ص)}{\sqrt{[ن \ (مجـ س^2) - (مجـ س)^2] \ [ن \ (مجـ ص^2) - (مجـ ص)^2]}}$$

$$= \frac{10(45900) - (550)(680)}{\sqrt{10(38500) - (55)^2} \ \sqrt{10(56000) - (680)^2}}$$

$$= \frac{459000 - 374000}{\sqrt{82500 \; 97600}} = \frac{85000}{(312.409)(287.228)}$$

$$= 0.9473$$

(د)

ض.: $\rho =$ صفر   ض1: $\rho \neq$ صفر

$$ت = ر \sqrt{\frac{ن - 2}{1 - ر^2}} = 0.9473 \sqrt{\frac{10 - 2}{1 - (0.9473)^2}} = 0.9473 \sqrt{\frac{8}{0.1027}}$$

$$= 0.9473 \sqrt{77.89} = 0.9473\,(8.826) = 8.360$$

وهى أكبر من القيمة الحرجة $ت_{(8\,،\,0.01)} = 2.896$ وكنتيجة لذلك يرفض فرض العدم ض. عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$ وبالتالى لا نستطيع إرجاع قيمة معامل ارتباط العينة ر= 0.9473 للصدفة ، أى نستنتج وجود علاقة ارتباط بين س ، ص عند مستوى معنوية $\alpha = 0.02$.

(هـ)

فترة ثقة للمتوسط الشرطى $\mu_{ص/س}$ بدرجة ثقة 98% هى:

$$ص_م - ت_{(ن-2\,،\,\alpha/2)} \cdot ع_{ص_م} < \mu_{ص/س} < ص_م + ت_{(ن-2\,،\,\alpha/2)} \cdot ع_{ص_م}$$

بوضع س = 40 نجد أن

$$ص_م = 11.35 + 1.03\,(40) = 11.35 + 41.2 = 52.55$$

$$\text{الحد الأدنى لفترة الثقة} = 52.55 - ت_{(8\,،\,0.01)}\, ع_{ص/س} \sqrt{\frac{1}{ن} + \frac{(س - \bar{س})^2}{مج\,س^2 - \frac{(مج\,س)^2}{ن}}}$$

$$= 52.55 - (2.896)(11.208)\sqrt{\frac{1}{10}+\frac{(40-55)^2}{38500-\frac{(550)^2}{10}}}$$

$$= 52.55 - (2.896)(11.208)\sqrt{0.1273}$$

$$= 52.55 - 11.5809 = 40.9691$$

والحد الأعلى لفترة الثقة = $52.55 + 11.5809 = 64.1309$

وتكون فترة الثقة 98% للمتوسط الشرطى $\mu_{\text{ص/س}}$ عند س = 40 هى:

$$40.9691 < \mu_{\text{ص/س}} < 64.1309$$

ويستكمل باقى الفترات بنفس الطريقة.

(و)

فترة التنبؤ 98% للقيمة الفعلية $\text{ص}_{\text{ن}}$ هى:

$$\text{ص}_{\text{م}} - \text{ت}_{(\text{ن}-2\text{ ، }\alpha/2)} \cdot \text{ع}_{\text{ص ن}} < \text{ص}_{\text{ن}} < \text{ص}_{\text{م}} + \text{ت}_{(\text{ن}-2\text{ ، }\alpha/2)} \cdot \text{ع}_{\text{ص ن}}$$

عند س = 40

$$\text{ع}_{\text{ص ن}} = \text{ع}_{\text{ص/س}}\sqrt{1+\frac{1}{\text{ن}}+\frac{(\text{س}-\bar{\text{س}})^2}{\text{مجـ س}^2-\frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}}}$$

$$= 11.208\sqrt{1+\frac{1}{10}+\frac{(40-55)^2}{38500-\frac{(550)^2}{10}}} = 11.208\sqrt{1.1273}$$

$$= (11.208)(1.0617) = 11.9$$

الحد الأدنى لفترة التنبؤ = $52.55 + 34.4625 = 87.0125$

$$18.0875 < \text{ص}_{\text{ن}} < 87.0125$$

تطبيقات على تحليل الانحدار

1. ترغب أحدى شركات التأمين على الحياة في تحديد العلاقة بين خبره البائع وحجم المبيعات ، سحبت عينه عشوائية من تسعه من مندوبي المبيعات حيث سجلت خبره كل منهم بالسنوات (س) ومبيعاتهم السنوية (ص) في السنة الحالية بمئات الآلاف من الدولارات الأمريكية . الجدول التالي يمثل بيانات هذه العينة:

ص	1	2	3	4	5	6	7	8	9
س	2	1	3	3	4	5	6	5	7

والمطلوب:

أ- إنشاء شكل الانتشار ورسم خط الانحدار على نفس الشكل
ب- تقدير المبيعات السنوية لمندوب مبيعات خبرته 10 سنوات
ج- هل توجد أدله كافيه على عدم مساواة معادل الانحدار β للصفر عند $\alpha = 0.5$
د- أوجد فتره ثقة 95 % للمتوسط الشرطي $\mu_{ص/س}$ عند
   1- س = 4.5
   2- س = 10
هـ- أوجد فتره تنبؤ 95 % للقيمة الفعلية ص ي عند س = 10

2. تحتفظ إحدى الشركات بسجل عن تكلفه صيانة كل ماكينة من ماكيناتها بالإضافة إلى عمر كل منها ، لمعرفه العلاقة بين عمر الماكينة س وتكلفه الصيانة ص ، سحبت عينه عشوائية من 6 ماكينات فحصلنا على الجدول التالي:

الماكينة	س	ص
1	2	70
2	1	40
3	3	100
4	2	80
5	1	30
6	3	100

والمطلوب:

أ- تحديد خط الانحدار بافتراض أن س هو المتغير المستقل وان ص هو المتغير التابع .

ب- تحديد تكلفه الصيانة لماكينة عمرها أربع سنوات .

ج- اختبار فرض العدم القائل بان β تساوى صفر عند α = 0.01

د- إيجاد فتره ثقة 99 % للمتوسط الشرطي $\mu_{ص/س}$ عند س = 2

هـ- إيجاد فتره تنبؤ 99 % للقيمة الفعلية ص ى عند س = 2

3. البيانات التالية تمثل مده الخدمة س وعدد الأجازات المرضية في السنة ص في عينه عشوائية من خمسه من العاملين بإحدى الشركات

س	15	9	13	11	12
ص	10	16	14	15	15

والمطلوب:

أ- إيجاد خط انحدار المربعات الصغرى

ب- إيجاد عدد الأجازات المرضية في السنة المناظر لسنوات خبره قدرها 14 سنه

ج- اختبار الفرض القائل بان معامل الانحدار β يساوى الصفر عند α = 0.05

د- إيجاد فتره ثقة 95 % للمتوسط الشرطي $\mu_{ص/س}$ عند

1) س = 12

2) س = 15

هـ- إيجاد فتره تنبؤ 95 % للقيمة الفعلية ص ى عند س = 15

و- حساب قيمه معامل الارتباط ر

ز- اختبار فرض العدم القائل بعدم وجود علاقة بين س ، ص عند α = 0.01

4. ترغب إحدى شركات الإعلان في معرفه ما إذا كانت هناك علاقة بين عدد الإعلانات المذاعة في التليفزيون عن سلطه معينه وحجم المبيعات من هذه السلطة. سحبت عينه معينه عشوائية من تسعه مدن فحصلنا على البيانات التالية:

س	1	2	3	4	5	6	7	8	9
ص	2	1	3	3	4	5	6	5	7

والمطلوب:

أ- حساب معامل الارتباط ر

ب- اختبار فرض العدم القائل بعدم وجود علاقة بين عدد الإعلانات التجارية وحجم المبيعات عند $\alpha = 0.05$

5. أجريت تجربه لتحديد العلاقة بين كميه الأمطار ومحصول القمح ، فحصلنا على البيانات التالية:

س	1	2	3	4	5	5	6	7	8	9
ص	1	3	2	5	5	4	7	6	9	8

والمطلوب:

أ- حساب قيمه معامل الارتباط ر

ب- اختبار فرض العدم القائل بعدم وجود علاقة بين كميه المطر ومحصول القمح عند $\alpha = .05$

6. البيانات التالية تمثل مده الخدمة س وحجم المبيعات الأسبوعية ص في عشوائية مكونه من خمسه مندوبين مبيعات بأحد الشركات الكبرى .

س	15	9	13	11	12
ص	10	16	14	15	15

والمطلوب:

أ- حساب قيمه معامل الارتباط ر

ب- اختبار فرض العدم القائل بعدم وجود علاقة بين مده الخدمة وحجم المبيعات عند $\alpha = 0.01$

7. في عينه عشوائية من 10 طلبه جامعيين ، جمعت بيانات عن المعدل التراكمي في المرحلة الثانوية س ، والمعدل التراكمي في الجامعة ص ، فحصلنا على المعلومات التالية:

مجـ س = 32.2 مجـ ص = 30 مجـ س ص = 98.32

مجـ $س^2$ = 105.74 مجـ $ص^2$ = 91.9 ن = 10

والمطلوب:

أ- حساب قيمه معامل الارتباط ر

ب- اختبار فرص العدم القائل بعدم وجود علاقة بين س ، ص عند $\alpha = 0.01$

8. لتحديد العلاقة بين درجات اختبار القدرات وعدد الوحدات المنتجة في الساعة ، سحبت عينه عشوائية من عمال الإنتاج فحصلنا على البيانات التالية:

مجـ س = 55 مجـ ص = 680 ن = 10

مجـ س ص = 45900 مجـ $س^2$ = 38500 مجـ $ص^2$ = 56000

والمطلوب:

أ- حساب قيمه معامل الارتباط ر

ب- تحديد ما إذا كانت هناك علاقة معنوية بين درجات اختبار القدرات وعدد الوحدات المنتجة في الساعة عند $\alpha = 0.02$

9. البيانات التالية تمثل عدد أيام الغياب ص ، وعدد سنوات العمل بإحدى الشركات س في عينه عشوائية من 10 من العاملين بهذه الشركة:

ص	2	صفر	5	6	4	9	2	15	صفر	7
س	7	8	2	3	5	4	6	10	4	11

والمطلوب:

أ- رسم شكل انتشار البيانات

ب- إيجاد معادله المربعات الصغرى لخط انحدار ص على س

ج- استخدام معادله الانحدار التي حصلت عليها للتنبؤ بعدد أيام غياب احد العاملين بالشركة والذي يعمل بها منذ أربع سنوات

د- حساب قيمه معامل الارتباط ر

ه- اختبار فرص العدم القائل بعدم وجود علاقة بين س ، ص $\alpha = 0.01$

10. البيانات التالية تمثل عدد سنوات الخدمة س وعدد العاملين الذين استقالوا من العمل بإحدى الشركات ص:

س	4	5	6	7	3
ص	7	6	3	2	7

والمطلوب:

أ- إيجاد معادله المربعات الصغرى باستخدام س كمتغير مستقل
ب- حساب قيمه معامل الارتباط ر
ج- اختبار فرض العدم القائل بان معامل ارتباط المجتمع يساوى الصفر عند $\alpha = 0.05$

11. البيانات التالية تمثل مده الخدمة س بأحد المطاعم ، وعدد الزبائن الذين تمت خدمتهم في الساعة ص لعينه عشوائية س 5 عائلات بهذا المطعم

س	4	7	2	12	5
ص	10	18	10	28	14

والمطلوب:

أ- إيجاد معادله المربعات الصغرى
ب- اختبار فرض العدم القائل بأن β = صفر عند $\alpha = 0.05$
ج- إيجاد فتره ثقة 95 % للمتوسط $\mu_{ص/س}$ وفترة تنبؤ 95 % للقيمة الفعلية $ص_ى$ عند س = 10
د- حساب قيمه معامل الارتباط ر
د- اختبار فرض العدم القائل بأن أ = صفر عند $\alpha = 0.05$

12. ترغب إحدى شركات الإعلان في تحديد العلاقة بين عدد الإعلانات التلفزيونية س وحجم المبيعات ص لسلعه معينه . البيانات التالية تمثل عينه عشوائية من عدد من المدن:

س	9	11	14	4	6	6	5	16	8	1	13	15
ص	29	67	49	12	10	24	10	58	28	10	77	94

والمطلوب:

أ- رسم شكل انتشار البيانات
ب- إيجاد الجزء المقطوع أ من المحور الرأسي ص
ج- إيجاد معامل الانحدار β
د- اختبار فرض العدم القائل بأن β = صفر عند α = 0.05 ، إيجاد فتره ثقه 95 % للمتوسط الشرطي $\mu_{ص/س}$ وفترة تنبؤ 95 % للقيمة الفعلية $ص_{ى}$ عند س = 10
ه- حساب قيمه معامل الارتباط ر
و- اختبار فرض العدم القائل بان معامل ارتباط المجتمع يساوى صفر عند α = 0.05

13. افترض أن س تمثل عدد سنوات الخدمة بإحدى الشركات وان ص تمثل مستوى الأداء . سحبت عينه عشوائية من عشره عاملين فحصلنا على البيانات التالية:

س	5	6	5	6	7	8	7	8	9	9
ص	8	9	6	7	4	7	5	6	3	5

والمطلوب:

أ- إيجاد خط المربعات الصغرى باستخدام س كمتغير مستقل
ب- حساب قيمه معامل ارتباط العينة ر
ج- اختبار فرض العدم القائل بان معامل ارتباط المجتمع أ يساوى الفر عند α = 0.05

14. تريد إحدى شركات التأمين الكبرى تحديد العلاقة بين خبره مندوبي مبيعاتهم وحجم المبيعات . سحبت عينه عشوائية من تسعه من مندوبي المبيعات حيث سجلت سنوات خبرتهم س ومبيعاتهم في السنة الحالية ص بمئات الآلاف من الدولارات . والجدول التالي يبين هذه البيانات

والمطلوب:

أ- إنشاء فترة ثقة 95 % للمتوسط الشرطي وفترة تنبؤ 95 % للقيمة الفعلية $ص_{ى}$ عند س = 10
ب- حساب معامل ارتباط س = 10
ج- اختبار فرض العدم القائل بان معامل ارتباط المجتمع أ يساوى صفر عند α = 0.05

15. سحبت عينه عشوائية من 6 طلبه لتحديد العلاقة بين ساعات استذكارهم س وبين درجاتهم في ماده الإحصاء ص ، فحصلنا على البيانات التالية

س	9	11	14	4	6	6
ص	38	67	49	12	10	24

والمطلوب:

أ- إيجاد معادله انحدار ص على س
ب- اختبار فرض العدم القائل بأن β = صفر عند α = 0.01
ج- حساب معامل ارتباط العينة ر
د- اختبار فرض العدم القائل بأن معامل ارتباط المجتمع أ يساوى صفر عند α = 0.05

16. الجدول التالي يمثل بيانات عينه عشوائية بين 6 قطع ارض متشابهه لمعرفه العلاقة بين كميه المحصول من فول الصويا وكميه المياه المستخدمة في الري

س	صفر	2	4	1	3	5
ص	20	28	32	25	30	31

والمطلوب:

أ- إيجاد معادله خط الانحدار باستخدام كميه المياه المستخدمة في الري كمتغير مستقل
ب- حساب معامل ارتباط العينة ر
ج- اختبار فرض العدم القائل بعدم وجود علاقة بين المتغيرين عند α = 0.01

17. افترض أن س تمثل درجات الإحصاء للطلبة في اختبار فصلي وان ص تمثل درجاتهم في الاختبار النهائي . اختيرت عينه عشوائية من 25 طالبا فحصلنا على بياناتهم التالية:

س	ص	س	ص
99	68	51	42
97	60	50	41
96	60	45	40
90	60	44	39

38	42	59	89
35	40	54	86
32	36	54	83
28	28	54	83
28	28	54	82
28	25	54	76
27	25	44	73
13	1	43	55
		45	76

والمطلوب:

أ- إيجاد خط انحدار ص على س

ب- حساب قيمه معامل ارتباط العينة ر

ج- اختبار فرض العدم القائل بعدم وجود علاقة بين س ، ص عند $\alpha = 0.02$

18. ترغب إحدى الشركات في دراسة العلاقة بين عدد الماكينات التي تنتظر دورها في الخدمة في وقف متوسط الوقت اللازم لخدمه أيه ماكينة. وبمعنى أخر ، ترغب الشركة في معرفه ما إذا كان هناك اتجاه بين عمال الخدمة لزيادة سرعه أدائهم في العمل مما يؤدى إلى تخفيض الوقت اللازم للخدمة ، عندما يكون عدد الماكينات التي يجب خدمتها إذا . ولهذا الغرض ، قامت الشركة بسحب عينه عشوائية مكونه من ثمانية سجلات يبين كل منها عدد الماكينات التي تنتظر خدمتها في بداية وقت ما (س) وعدد الماكينات التي تمت خدمتها خلال هذا الوقت ص . وفيما يلي البيانات التي حصلت عليها الشركة:

ص	س
6	2
3	8
4	5
5	3
6	3
4	3
7	4
5	4

والمطلوب:

أ- حساب قيمه كل من أ ، ب في خط الانحدار ص على س باستخدام طريقه المربعات الصغرى

ب- اختبار الفرص التعاقد بان معامل الانحدار لا يساوى الصفر عند $\alpha = 0.01$

ت- إنشاء فتره ثقة 99 % للمتوسط الشرطي $\mu_{ص/س}$ وإنشاء فتره تنبؤ 99 % للقيمة الفعلية صن عند س = 6

ث- حساب معامل ارتباط العينة ر

ج- اختبار فرص العدم القائل بعدم وجود ارتباط بين المتغيرين عند $\alpha = 0.05$

19. افترض أننا نرغب في تحديد العلاقة بين كميه النتروجين في السماد وبين محصول القمح ص . افترض أننا حصلنا على البيانات التالية من عينه عشوائية مكونه من 20 قطعه ارض متماثلة:

مجـ س = 230 مجـ ص = 260

مجـ س ص = 3490 مجـ س^2 = 3144 مجـ ص^2 = 3904

والمطلوب:

أ- إيجاد خط الانحدار ص على س

ب- اختبار فرص العدم القائل بان β = صفر في مقابل الفرص البديل القائل بان β ≠صفر عند $\alpha = 0.02$

ج- حساب معامل ارتباط العينة ر

د- اختبار فرص العدم ص : أ = صفر في مقابل الفرص البديل القائل بان β ≠ صفر عند $\alpha = 0.02$

20. من المعتاد في مجال التجارة إعطاء خصم عند شراء كميه كبيره من السلعة . البيانات التالية توضح هذه الحقيقة:

س	ص
1	10
2	8
3	7
4	6
5	4

والمطلوب:

أ- حساب الجزء المقطوع من المحور الرأسي أ والميل ب
ب- اختبار فرص العدم القائل بان β = صفر في مقابل الفرص البديل بان β ≠ صفر عند α = 0.05
ج- حساب قيمه معامل ارتباط العينة ر
د- هل يوجد دليل كاف لرفض فرص العدم القائل بعدم وجود علاقة بين س ، ص عند α = 0.05

21. افترض أن س تمثل طول الأب و أن ص تمثل طول الابن بالسنتيمترات .
الجدول التالي يمثل بيانات عينه عشوائية لأطوال الآباء والأبناء:

س	ص
162	165
158	160
168	160
177	180
170	172
155	155
175	170
157	160
150	155
178	173

والمطلوب:

أ- رسم شكل الانتشار
ب- إيجاد خط المربعات الصغرى ورسمه على شكل الانتشار
ج- حساب معامل ارتباط العينة ر
د- هل يوجد علاقة معنوية بين س ، ص عند α = 0.05

22. البيانات التالية تمثل متوسط سعر السندات العامة ص ومتوسط سعر الفائدة س خلال الفترة الزمنية من 1970 إلى 1979

س	ص
6	40
7	35

30	8
20	9
10	10
15	8
20	8
30	6
40	7
20	9

والمطلوب:

أ- إيجاد خط انحدار ص على س ورسم هذا الخط على شكل الانتشار
ب- حساب قيمه معامل ارتباط العينة ر
ج- اختبار فرض العدم القائل بعدم وجود علاقة بين س ، ص عند $\alpha = 0.01$
د- اختبار فرض العدم القائل بان β = صفر في مقابل الفرض البديل بان $\beta \neq$ صفر عند $\alpha = 0.02$
د- إنشاء فتره ثقة 98 % للمتوسط الشرطي $\mu_{ص/س}$ وإنشاء فتره تنبؤ 98 % للقيمة الفعلية صى عند س = 10. اشرح الفرق بين الفترتين.

الفصل الخامس

مقدمه فى

تحليل السلاسل الزمنية

مقدمه فى تحليل السلاسل الزمنية

An Introduction To Time Series Analysis

(5-1) مقدمة

السلسلة الزمنية هي مجموعه الأرقام الناتجة من تتبع ظاهره معينه خلال فتره من الزمن تكون طويلة نسبيا ، وتسجيل هذه المشاهدات في فترات يحسن أن تكون منتظمة .

واهم الأهداف التى تحققها دراسة السلاسل الزمنية ما يلي:

1- التعرف على التغييرات التى تطرأ على قيم الظاهرة مع الفترات الزمنية المختلفة .
2- التعرف على أنواع التغيرات التى تطرأ على قيم الظاهرة والتي تتأثر بها .
3- دراسة التغيرات التى تتأثر بها الظاهرة والتعرف على أسبابها ونتائجها .
4- التعرف على علاقة ارتباط هذه الظاهرة المدروسة بغيرها من الظواهر الأخرى .
5- التنبؤ بقيم هذه الظاهرة مستقبلا ، أى في [illegible] ات التسجيل ، بافتراض استمرار الظروف المحيطة بقيم الظاهرة .

ومثال للسلاسل الزمنية:

عدد السكان في جمهوريه مصر العربية في التعدادات المتتابعة كما يتضح مما يلي:

سنوات التعداد	1907	1917	1927	1937	1947	1960
عدد السكان (بالمليون)	11.4	12.7	14.2	15.9	19	26

(5 – 2) عناصر السلسلة الزمنية:

تتمثل عناصر السلسلة الزمنية في التغيرات التالية:

(1) التغيرات طويلة الأجل (الاتجاه العام):

وهو الطريق الذى تتخذه البيانات أو الظواهر لفترة طويلة من الزمن ما لم تتأثر بالتغيرات الأخرى ، وقد يكون التغير في اتجاه واحد إما إلى الزيادة أو النقصان ، وفى هذه الحالة يأخذ الشكل العام للظاهرة معادله الخط المستقيم على الصورة:

ص = أ + ب س

وقد تتجه الظاهرة إلى الزيادة فتره طويلة من الزمن ثم تتجه بعدها إلى النقصان ، كما قد يحدث العكس ، وفى هذه الحالة تكون الصورة العامة لقيم الظاهرة من الدرجة الثانية أو ما فوقها حسب عدد نقط الانقلاب في خط سير الظاهرة .

(2) التغيرات الموسمية:

وهى تغيرات منتظمة تتأثر بها الظاهرة خلال فترات زمنيه أقصاها سنة ، ففى كثير من الظواهر نجد تغيرا في مواسم قد تكون ربه سنوية أو شهرية أو أسبوعية ، والتغير في مثل هذه الأحوال يسمى تغيرا موسميا ، حيث يتكرر التأثير الموسمى ويعيد اتجاهه وسيره كل فترة ، مع ملاحظه إن الفترة قد تكون يوما أو أسبوعا أو شهرا أو فصلا من السنة.

(3) التغيرات الدورية:

وهى تغيرات تطرأ على السلسلة الزمنية في فترات متباعدة تكون مدتها ثلاث سنوات أو أكثر (تصل إلى 11 سنة) ، وهى اقل انتظاما من التغيرات الموسمية التى تختلف فيها كل دوره عن الأخرى من حيث طولها وقوتها ، وأوضح مثال للتغيرات الدورية هو الأزمات الاقتصادية التى تنتاب معظم الظواهر التجارية والمالية فى ظل النظام الرأسمالى غير الموجه (كل 10 سنوات تقريبا) .

(4) التغيرات العرضية أو الفجائية:

وتحدث هذه التغيرات نتيجة لعوامل فجائية عرضيه غير منتظمة وغير متوقعه تؤثر على الظواهر المختلفة ، ومن أمثلتها ، الحروب والثورات الفجائية والأوبئة والمجاعات والزلازل والبراكين .

ولما كان من المستحيل معرفه الوقت الذى تقع فيه هذه الحوادث ، فلا يمكن التنبؤ بمدى تأثيرها على الظواهر .

وإذا رمزنا للقيمة الفعلية للظاهرة بالرمز (ص) ، وللاتجاه العام بالرمز (جـ) ، وللتغيرات الموسمية بالرمز (م) ، وللتغيرات الدورية بالرمز (د) ، وللتغيرات الفجائية بالرمز (ع) ، فإن:

$$ص = جـ \times م \times د \times ع$$

ولسوف نقتصر في هذا الجزء على دراسة الاتجاه العام والتغيرات الموسمية.

(5- 3) قياس الاتجاه العام بطريقه المربعات الصغرى:

لقد سبق ذكر أن معادله الخط المستقيم تأخذ الصورة:

$$ص = أ + ب س$$

ويمكننا اعتبار أن (ص) تمثل قيمه الظاهرة (المتغير التابع) ، (أ) هى القيمة الاتجاهية للظاهرة في الفترة الزمنية التى تتخذ كأساس عند إيجاد معادله الخط المستقيم ، وهو الثابت الذى يساوى (ص) عندما (س يساوى صفر) ، (ب) هى معدل التغير في وحده الزمن أو ميل خط الاتجاه العام ، ويوضح كميه الزيادة أو النقص في (ص) لكل وحده تغير في (س) ، حيث (س) المتغير المستقل (أو البعد الزمنى عن نقطة الأصل).

ملحوظة:

لكى يكون الخط الموفق ممثلا أحسن تمثيل ، نقوم بتحديد قيمه (أ ، ب) بحيث يكون مجموع مربعات انحرافات النقط على الخط اصغر ما يمكن ، ولكى يكون هذه المجموع اصغر ما يمكن يجب أن يكون مجموع الانحرافات نفسها مساويا للصفر ، بأن يكون مجموع حواصل ضرب كل انحراف في الإحداثى الأفقى المناظر له مساويا للصفر أيضا. وهذا الخط السابق يعرف بخط المربعات الصغرى (الدنيا) ، وتعرف الطريقة أيضا بطريقه المربعات الصغرى التى سبق وان اشرنا إليها في الفصل السابق .

وقد ذكرنا انه لإيجاد قيمتى (أ ، ب) في معادله الخط المستقيم ، يستخدم المعادلتين الآتيتين:

$$\text{مجـ ص} = \text{أ ن} + \text{ن مجـ س}$$

$$\text{مجـ س ص} = \text{أ مجـ س} + \text{ب مجـ س}2$$

أو يمكن الحصول على قيمتى (أ ، ب) مباشره على النحو التالى:

$$\text{ب} = \frac{\text{مجـ س ص} - \frac{(\text{مجـ س})(\text{مجـ ص})}{\text{ن}}}{\text{مجـ س}^2 - \frac{(\text{مجـ س})^2}{\text{ن}}}$$

$$أ = \frac{مجـ ص}{ن} - ب \frac{مجـ س}{ن}$$

والمثال التالى يوضح كيفيه قياس الاتجاه العام إذا كانت البيانات يمثلها خط مستقيم على الصورة: ص = أ + ب س

مثال (1)

بافتراض توافر البيانات التالية:

السنة	1995	1996	1997	1998	1999
قيم الظاهرة (ص)	4	6	10	15	25

نجد انه باتخاذ سنه 1995 كسنه أساس ، فإنه يمكننا تكوين الجدول التالى تمهيدا لتقدير (أ ، ب) ، حيث (س) تمثل هنا البعد الزمنى عن سنه الأساس:

السنة	ص	ص	$س^2$	س ص
1995	4	صفر	صفر	صفر
1996	6	1	1	6
1997	10	2	4	20
1998	15	3	9	45
1999	25	4	16	[illegible]
المجموع	60	10	30	[illegible]

ويتضح من الجدول السابق أن:

مجـ ص = 60 ، مجـ س = 10 ، مجـ س ص = 171 ،

مجـ $س^2$ = 30 ، ن = 5

وعلى ذلك يمكن إيجاد الثابتين (أ ، ب) بالتعويض بهذه المجاميع في المعادلتين:

مجـ ص = أ ن + ن مجـ س

مجـ س ص = أ مجـ س + ب مجـ $س^2$

∴ 60 = 5 أ + 10 ب.. (1)

171 = 10 أ + 30 ب... (2)

وبحل المعادلتين (1) ، (2) نحصل على الثابتين (أ ، ب) كما يلى:

بضرب المعادلة (1) × 2

∴ 120 = 10 أ + 20 ب .... (3)

بطرح المعادلة (3) من المعادلة (2):

∴ 51 = 10 ب.. (4)

ومن المعادلة (4) نجد أن:

∴ ب = $\frac{51}{10}$ = 5.1

وبالتعويض عن قيمة (ب) في المعادلة (1):

∴ 60 = 5 أ + 10 (5.1)

∴ 60 − 51 = 5 أ

∴ 9 = 5 أ

∴ أ = $\frac{9}{5}$ = 1.8

ومن ناحية أخرى يمكن إيجاد المعادلتين (أ ، ب) بالتعويض بالمجاميع السابقة في المعادلتين:

$$ب = \frac{مجـ\ س ص - \frac{(مجـ\ س)(مجـ\ ص)}{ن}}{مجـ\ س^2 - \frac{(مجـ\ س)^2}{ن}}$$

$$أ = \frac{مجـ\ ص}{ن} - ب\ \frac{مجـ س}{ن}$$

وذلك ، حيث:

$$ب = \frac{171 - \frac{60 \times 10}{5}}{30 - \frac{(10)^2}{5}} = \frac{171 - 120}{30 - 20} = \frac{51}{10} = 5.1$$

$$أ = \frac{60}{5} - \left(\frac{10}{5} \times 5.1\right)$$

$$= 12 - (2 \times 5.1) = 1.8$$

وعلى ذلك تكون معادله خط الاتجاه العام بطريقه المربعات الصغرى هى:

ص = 1.8 + 5.1 س (بأساس 1995 ، س = سنه)

وللتنبؤ بالقيم الاتجاهية للظاهرة (ص) في السنوات المستقبلية يتم التعويض في معادله الاتجاه العام المتوصل إليها عن (س) بالفارق الزمنى بين السنة المراد التنبؤ بقيمه الظاهرة عندها وسنه الأساس ، أى:

س = البعد الزمنى بين سنه التنبؤ وسنه الأساس

فمثلا: إذا كان المطلوب هو التنبؤ بقيمه الظاهرة (ص) في سنه 2005 م ، يكون:

س = 2005 – 1995 = 10 سنوات وبالتعويض عن س = 10 في معادله الاتجاه العام المتوصل إليها:

$$\therefore ص_{2005} = 1.8 + (5.1 \times 10) = 1.8 + 51 = 52.8$$

ومن ناحية ثالثة يمكن إيجاد الثابتين (أ ، ب) بطريقه مختصرة بجعل سنة الأساس (نقطة الأصل) في منتصف السلسلة الزمنية تماما ، وفي هذا المثال تكون سنه الأساس في هذه الحالة هى سنه 1997 ، وفى هذه الحالة نستخدم العلاقات التالية لإيجاد الثابتين (أ ، ب):

$$ب = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^2} \quad ، \quad أ = \frac{مجـ ص}{ن}$$

وفي هذه الحالة لن تختلف قيمه (ب) ، ولكن ستختلف قيمه (أ) ، لتغير سنة الأساس ، أما القيم الاتجاهية فلن تختلف عن تلك التى حصلنا عليها من قبل ، ويتضح ذلك من خلال أعادة حل المثال السابق بالطريقة المختصرة .

ففى المثال السابق:

بجعل سنه الأساس في منتصف السلسلة الزمنية ، أى أن سنه 1997 هى سنة الأساس ، وتكون:

س = السنة – سنه الأساس

وبالتالى نكون الجدول التالى:

السنة	ص	س	$س^2$	س ص
1995	4	-2	4	-8
1996	6	-1	1	-6
1997	10	صفر	صفر	صفر
1998	15	1	1	15
1999	25	2	4	50
المجموع	60	صفر	10	51

وعلى ذلك ، يكون:

∴ مجـ ص= 60 ، مجـ س ص= 51 ، مجـ $س^2$= 10 ، ن= 5

وبالتعويض بهذه المجاميع السابقة تجد أن:

ب = (مجـ س ص) / (مجـ $س^2$) = $\frac{51}{10}$ = **5.1**

أ = (مجـ ص) / ن = $\frac{60}{5}$ = **12**

وعلى ذلك تكون معادله خط الاتجاه العام بطريقه المربعات الصغرى هي:

ص = 12 + 5.1 س (بفرض 1997 ، س = صفر)

وللتنبؤ بالقيم الاتجاهية للظاهرة (ص) في السنوات المستقبلية يتم التعويض في معادله الاتجاه العام المتوصل إليها عن (س) بالفارق الزمني بين السنة المراد التنبؤ بقيمه الظاهرة عندها وسنه الأساس وهي سنه 1997 ، أي:

فعند التنبؤ بقيمه الظاهرة (ص) في سنه 2005 م ، يكون:

س = 2005 – 1997 = 8 سنوات

وبالتعويض عن س = 8 في معادله الاتجاه العام المتوصل إليها:

ص = 12 + 5.1 س

∴ ص $_{2005}$ = 12 + (5.1 × 8) = 12 + 40.8 = **52.8**

وهى نفس النتيجة التى سبق أن توصلنا إليها في الطريقة المطولة السابقة.

ملحوظة هامة:

عند استخدام الطريقة المختصرة في تقدير معادله الاتجاه العام بطريقه المربعات الصغرى ، فإنه لإيجاد المتغير (س) يتم افتراض نقطه أصل من بين سنوات السلسلة الزمنية ، وغالبا ما يتم اخذ منتصف السلسلة الزمنية كنقطه أصل بحيث يكون مجـ س = صفر ، وتكون:

- س = السنة – نقطة الأصل (إذا كان عدد السنوات فردى)
- س = (السنة – نقطة) × 2 (إذا كان عدد السنوات زوجى)

ونتناول فيما يلي أمثلة تطبيقية توضح ذلك.

مثال (2)

البيانات التالية تمثل قيم الظاهرة (ص) ، وذلك عن الفترة الزمنية (1995–2000 م):

السنة	1995	1996	1997	1998	1999	2000
الأرباح (ص)	4	6	10	15	25	30

المطلوب:

1- تقدير معادله الاتجاه العام التى تصف الظاهرة (ص) ، باستخدام الطريقة المختصرة للمربعات الصغرى ؟

2- التنبؤ بالظاهرة (ص) في السنوات 2005 ، 2010.

الحـــل:

(1) تقدير معادلة الاتجاه العام:

تكون معادلة الاتجاه العام في الصورة: ص = أ + ب س

وفى هذه الحالة يتم أخذ منتصف السلسلة الزمنية كنقطه أصل بحيث يكون مجـ س = صفر ، وحيث أن عدد سنوات السلسلة عدد زوجى فإن:

س = (السنة – نقطة الأصل) × 2

وباعتبار نقطه الأصل منتصف السلسلة الزمنية وهى 1997.5 ، أى أن:

س = (السنة – 1997.5) × 2

وبالتالى يمكن حساب كل من المجاميع: مجـ ص ، مجـ س ص ، مجـ $س^2$ ومن خلال تكوين الجدول التالى:

السنة	س	ص	س ص	$س^2$
1995	5-	4	20-	25
1996	3-	6	18-	9
1997	1-	10	10-	1
1997.5				
1998	1	15	15	1
1999	3	25	75	9
2000	5	30	150	25
المجموع	--	90	192	70

∴ مجـ ص = 90 مجـ س ص = 192 مجـ $س^2$ = 70 ، ن = 6

وبالتعويض بهذه المجاميع السابقة نجد أن:

$$ب = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^2} = \frac{192}{70} = \boxed{2.7}$$

$$أ = \frac{مجـ_{ص}}{ن} = \frac{90}{6} = \boxed{15}$$

وعلى ذلك فإن معادله الاتجاه العام المقدرة هى:

ص= 15 + 2.7 س (بأساس 97 – 1998 ، س = نصف سنة)

(2) التنبؤ بالظاهرة (ص):

يمكن التنبؤ بالظاهرة (ص) في السنوات المحددة بالتعويض عن (س) في المعادلة المقدرة حيث:

س = (السنة موضع التنبؤ – نقطه الأصل) × 2

= (السنة موضع التنبؤ – 1997.5) × 2

وذلك كما يلى:

- **سنه 2005 م:**

س = (2005 – 1997.5) × 2 = 15

$\therefore$ $ص_{2005}$ = 15 + (2.7 × 15) = 15 + 40.5 = $\boxed{55.5}$

- **سنه 2010 م:**

س = (2010 – 1997.5) × 2 = 25

$\therefore$ $ص_{2010}$ = 15 + (2.7 × 25) = 15 + 67.5 = 28.5

تعديل معادله الاتجاه العام:

نبين فيما يلي كيفيه إجراء بعض التعديلات على معادله الاتجاه العام تتعلق بالعبد الزمنى (س) أو تغيير سنه الأساس:

التعبير عن البعد الزمنى (س) بالسنة بدلا من النصف سنه:

يمكن تحقيق ذلك عن طريق ضرب (س) فقط × (2) ، وبالتطبيق على معادلة الاتجاه العام في المثال السابق ، فإن

ص= 15 + 2.7 (2 س)

ص= 15 + 5.4 س (بأساس 97 – 1998 ، س = سنة)

تغيير سنه الأساس:

لتغيير سنه الأساس من سنه (97 – 1998) إلى سنه 1998 مثلا ، يعنى ذلك تحريك سنه الأساس (نصف سنة) ويكون ذلك بإضافة $\frac{1}{2}$ للمتغير (س) ، أى نستبدل (س) بـ (س + $\frac{1}{2}$) ؛ وعلى ذلك:

ص= 15 + 5.4 (س + 2/1)

ص= 15 + 5.4 س + 2.7

ص= 17.7 + 5.4 س (بأساس 1998 ، س = سنة)

ولاستخدام الصورة السابقة في التنبؤ بالظاهرة (ص) يتم التعويض عن (س) في المعادلة حيث:

س = (السنة موضع التنبؤ – 1998)

- **ففى سنه 2005 م:**

س = (2005 – 1998) = 7

∴ $ص_{2005}$ = 17.7 + (7 × 5.4) = 17.7 + 37.8 = 55.5

وهى نفس النتيجة السابقة .

مثال (3)

بالتطبيق على بيانات المثال السابق ، المطلوب لاستخدام الطريقة المطولة للمربعات الصغرى في تقدير معادله الاتجاه العام للظاهرة (ص) ، والتنبؤ بالظاهرة (ص) في سنه 2005 ؟ .

الحـــل:

(1) تقدير معادلة الاتجاه العام:

تكون معادله الاتجاه العام في الصورة: صَ = أ + بَ س

نجد انه باتخاذ سنه 1995 كسنه أساس ، فإنه يمكننا تكوين الجدول التالى تمهيدا لتقدير (أ ، بَ) ، (س) تمثل هنا البعد الزمنى عن سنه الأســاس:

السنة	ص	ص	$س^2$	س ص
1995	4	صفر	صفر	صفر
1996	6	1	1	6
1997	10	2	4	20
1998	15	3	9	45
1999	25	4	16	100
2000	30	5	25	150
المجموع	90	15	55	321

ويتضح من الجدول السابق أن:

مجـ ص = 90 ، مجـ س = 15 ، مجـ س ص = 321 ، مجـ $س^2$ = 55 ، ن = 6

ومن ناحية أخرى يمكن إيجاد الثابتين (أ ، بَ) بالتعويض بالمجاميع السابقة في المعادلتين التاليتين:

$$ب = \frac{مجـ س ص - \frac{(مجـ س)(مجـ ص)}{ن}}{مجـ س^2 - \frac{(مجـ س)^2}{ن}}$$

$$أ = \frac{مجـ ص}{ن} - ب \frac{مجـ س}{ن}$$

وذلك ، حيث:

$$ب = \frac{321 - \frac{90 \times 15}{6}}{55 - \frac{(15)^2}{6}} = \frac{321-225}{55-37.5} = \frac{96}{17.5} = \boxed{5.4}$$

$$، \quad أ = \frac{90}{6} - \left(\frac{15}{6} \times 5.4\right) = 15 - (2.5 \times 5.4) = \boxed{1.5}$$

وعلى ذلك تكون معادله خط الاتجاه العام بطريقه المربعات الصغرى هى:

ص = 1.5 + 5.4 س (بأساس 1995 ، س = سنة)

وباستخدام هذه المعادلة يمكن التنبؤ بالقيم الاتجاهية للظاهرة (ص) في السنوات المستقبلية حيث يتم التعويض في المعادلة عن (س) بالفارق الزمنى بين السنة المراد التنبؤ بقيمه الظاهرة عندها وسنه الأساس وهى سنه 1995 ، اى:

في سنه 2005 م ، يكون:

س = 2005 – 1995 = 10 سنوات

$$\therefore ص_{2005} = 1.5 + (10 \times 5.4) = 1.5 + 5.4 = \boxed{55.5}$$

وهى نفس النتيجة التى سبق أن توصلنا إليها في الطريقة المختصرة السابقة .

مثال (4):

البيانات التالية تمثل إنتاج شركه بترول (بالمليون برميل) (ص) ، وذلك عن الفترة الزمنية (1996 – 2000 م) ، حيث:

السنة	1996	1997	1998	1999	2000
كميه الإنتاج (ص)	3	5	8	9	10

المطلوب:

1- تقدير معادله الاتجاه العام التى تصف الكميه المنتجة (ص) ، كداله في الزمن (س) بطريقه المربعات الصغرى؟

2- التنبؤ بالكميات المنتجة (ص) في السنوات 2005 ، 2010 ؟

الحل:

(1) تقدير معادله الاتجاه العام:

تكون معادله الاتجاه في الصورة: ص = أ + ب س

وفى هذه الحالة نجد أن (ص) تمثل قيم الظاهرة موضع الدراسة ، ولإيجاد المتغير (س) يتم افتراض نقطه أصل في منتصف السلسلة الزمنية بحيث يكون مجـ س = صفر .

وباعتبار نقطه الأصل منتصف السلسلة الزمنية وهى سنه 1998 ، فإنه يمكن حساب كل من المجاميع: مجـ ص ، مجـ س ص ، مجـ $س^2$ ، من خلال تكوين الجدول التالى:

السنة	س	ص	س ص	$س^2$
1996	2-	3	6-	4
1997	1-	5	5-	1
1998	صفر	صفر	صفر	صفر
1999	1	9	9	1
2000	2	20	20	4
المجموع	--	35	18	10

∴ مجـ ص = 35 مجـ س ص = 18 مجـ $س^2$ = 10 ، ن = 5

$$ب = \frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^2} = \frac{18}{10} = \boxed{1.8}$$

$$، \; أ = \frac{\text{مجـ ص}}{ن} = \frac{35}{5} = \boxed{7}$$

وعلى ذلك فإن معادلة الاتجاه العام المقدرة هى:

ص = 7 + 1.8 س (بأساس 1998 ، س = سنة)

(2) التنبؤ بالكميات المنتجة (ص):

يمكن التنبؤ بالكميات المنتجة (ص) في السنوات المحددة بالتعويض عن (س) في المعادلة المقدرة حيث:

س = السنة موضع التنبؤ – 1998 (لأن عدد السنوات فردى)

- سنه 2005 م:

س = 2005 – 1998 = 7

∴ $ص_{2005}$ = 7 ÷ (1.8 × 7) = 7 + 12.6 = $\boxed{19.6}$

- سنه 2010 م:

س = 2010 – 1998 = 12

∴ $ص^{\wedge}_{2010}$ = 7 + (12 × 1.8) = 7 + 21.6 = **28.6**

مثال (5):

البيانات التالية تمثل أرباح احدى الشركات الصناعية الكبرى (بآلاف الجنيهات) (ص) ، وذلك عن الفترة الزمنية (1995 – 2000 م):

السنة	1995	1996	1997	1998	1999	2000
الأرباح (ص)	2	3	5	9	12	11

المطلوب:

1- تقدير معادله الاتجاه العام التى تصف الأرباح (ص) ، كدالة في الزمن (س) بطريقه المربعات الصغرى ؟

2- التنبؤ بالأرباح (ص) في السنوات 2005 ، 2010 .

الحــــل:

(1) تقدير معادله الاتجاه العام:

تكون معادله الاتجاه العام في الصورة: $ص^{\wedge}$ = أ + ب س

وفى هذه الحالة نجد أن (ص) تمثل قيم الظاهرة (الأرباح) ، ولإيجاد المتغير (س) يتم اخذ منتصف السلسلة الزمنية كنقطه أصل بحيث يكون مجـ س = صفر ، وحيث أن عدد سنوات السلسلة عدد زوجى فإن:

س = (السنة – نقطه الأصل) × 2

وباعتبار نقطة الأصل منتصف السلسلة الزمنية وهى 1997.5 ، فإنه يمكن حساب كل من المجاميع: مجـ ص ، مجـ س ص ، مجـ $س^2$ ، من خلال تكوين الجدول التالى:

السنة	س	ص	س ص	$س^2$
1995	5-	2	10-	25
1996	3-	3	9-	9
1997	1-	5	5-	1
1997.5				
1998	1	9	9	1
1999	3	12	36	9
2000	5	11	55	25
المجموع	--	42	76	70

∴ مجـ$_{ص}$ = 42 مجـ$_{س ص}$ = 76 مجـ$_{س}^2$ = 70 ، ن = 6

$$ب = \frac{مجـ س ص}{مجـ س^2} = \frac{76}{70} = \boxed{1.09}$$

$$، أ = \frac{مجـ ص}{ن} = \frac{42}{6} = \boxed{7}$$

وعلى ذلك فإن معادله الاتجاه العام المقدرة هى:

ص̂ = 7 + 1.09 س (بأساس 97 – 1998 ، س = نصف سنة)

(2) التنبؤ بالأرباح (ص):

س = (السنة موضع التنبؤ – 1997.5) × 2

- سنه 2005 م:

س = (2005 – 1997.5) × 2 = 15

$$\therefore \text{ص}_{2005} = (15 \times 1.09) + 7 = 16.35 + 7 = \boxed{23.35}$$

- سنه 2010 م:

$$\text{س} = (2010 - 1997.5) \times 2 = 25$$

$$\therefore \text{ص}_{2010} = (25 \times 1.09) + 7 = 27.25 - 7 = \boxed{34.25}$$

(5–4) قياس التغيرات الموسمية بطريقه المتوسطات البسيطة:

(النسب الموسمية – الرقم القياسى للتغيرات الموسمية)

وهنا نجد انه لحساب الرقم القياسى للتغيرات الموسمية نتبع الخطوات التالية:

1- نحسب متوسط قيم كل موسم لجميع السنوات ، سواء كان الموسم يوما أو أسبوعا أو شهرا أو ربع سنه ... الخ .

2- نحسب المتوسط العام وهو متوسط المتوسطات الحسابية للمواسم .

3- نوجد النسبة بين كل متوسط موسمى والمتوسط العام ، ونضرب هذه النسبة × 100 ، لنحصل على ما يسمى بالرقم القياسى للتغيرات الموسمية (أو النسب الموسمية) .

مثال (6):

إذا كان الجدول التالى يمثل مبيعات احدى الشركات (بآلاف الجنيهات) ، في المدة من 1994 إلى 1996 كل ربع سنة:

السنة	الربع الأول	الربع الثانى	الربع الثالث	الربع الرابع
1994	20	14	6	18
1995	18	6	8	9
1996	16	13	10	12

المطلوب:

حساب الرقم القياسى للتغيرات الموسمية (أو النسب الموسمية) ؟ .

الحـــل:

يمكن حساب الرقم القياسى للتغيرات الموسمية (أو النسب الموسمية) كما يلي:

الربع \ السنة	94	95	96	المجموع الموسمي	الوسط الموسمي	النسب الموسمية
الأول	20	18	16	54	18	% 144
الثانى	14	6	13	33	11	% 88
الثالث	6	8	10	24	8	% 64
الرابع	18	9	12	39	13	% 104
المجموع					50	400

وحيث أن: الوسط العام = $\frac{50}{400}$ = 12.5 %

∴ الرقم القياسى للتغيرات الموسمية للربع الأول = $\frac{18}{12.5}$% = 144%

∴ الرقم القياسى للتغيرات الموسمية للربع الثانى = $\frac{11}{12.5}$% = 88%

∴ الرقم القياسى للتغيرات الموسمية للربع الثالث = $\frac{8}{12.5}$% = 64%

∴ الرقم القياسى للتغيرات الموسمية للربع الرابع = $\frac{13}{12.5}$% = 104%

(5 – 5) التنبؤ بقيمه الظاهرة موسميا:

نبين فيما يلي كيفيه التنبؤ بقيمه الظاهرة موسميا في أى من الحالتين التاليتين:

1- إذا كانت القيم السنوية لا تتأثر بالاتجاه العام بشكل واضح .
2- إذا كان الاتجاه العام يؤثر بشكل واضح في القيم السنوية .

الحالة الأولى:

إذا كانت القيم السنوية لا تتأثر بالاتجاه العام بشكل واضح: وفى هذه الحالة يتم ضرب متوسط الفترة الأخيرة × الرقم القياسى للمتغيرات الموسمية في كل ربع السنة .

فمثلا: إذا أردنا التنبؤ بالمبيعات في الربع الثانى من عام 1997 ، نتبع ما يلي:

مبيعات الربع الثانى من عام 1997 = متوسط عام 1996× $\frac{88}{100}$

$$= \frac{12+10+13+16}{4} \times \frac{88}{100}$$

$$= \frac{51}{4} \times \frac{88}{100} = 12.75 \times 0.88 = 11.22$$

الحالة الثانية:

إذا كان الاتجاه العام يؤثر بشكل واضح في القيم السنوية: نقوم بحساب القيمة ألاتجاهيه للسنة المراد التنبؤ بالقيم الموسمية الخاصة بها بتقدير الاتجاه العام بطريقه المربعات الصغرى ، ثم نحسب متوسط الفترة للسنة المطلوبة ، وذلك بقسمه القيمة الاتجاهية لهذه السنة على عدد الفترات ، ثم نحسب القيم الموسمية للفترات المختلفة بضرب المتوسط × الرقم القياسى للمتغيرات الموسمية لهذه الفترات ، والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال (7)

فيما يلي بيان بالكميات المباعة (بآلاف الوحدات) لأحد مصانع الأدوية وذلك في الفترة الزمنية (1994 – 2000 م):

السنة	1994	1995	1996	1997	1998	1999	2000
المبيعات	7	10	12	15	18	19	23

وكانت الكميات المباعة في كل ربع خلال السنوات من (1998– 2000) كما يلي:

الربع \ السنة	1998	1999	2000
الأول	5	6	7
الثاني	6	7	8
الثالث	3	3	3
الرابع	4	3	5
المجموع	18	19	23

المطلوب:

تقدير الكميه المتوقع بيعها في عام 2003 م ، في كل ربع من هذه السنة ؟

الحـــل:

لحل هذا المثال يجب أولا تقدير معادله خط الاتجاه العام ، وذلك على النحو التالى:

تكون معادله خط الاتجاه العام في الصورة: صَ = أ + بَ س

وباعتبار نقطه الأصل منتصف السلسلة الزمنية وهى 1997 ، فإنه يمكن حساب كل من المجاميع: مجـ ص ، مجـ س ص ، مجـ $س^2$ ، من خلال تكوين الجدول التالى:

سنة	ص	س	س ص	$س^2$
1994	7	3-	21-	9
1995	10	2-	20-	4
1996	12	1-	12-	1
1997	15	صفر	صفر	صفر
1998	18	1	18	1
1999	19	2	38	4
2000	23	3	69	9
المجموع	104	--	72	28

∴ مجـ ص = 104 مجـ س ص = 72 مجـ $س^2$ = 28 ، ن = 7

∴ ب = $\frac{\text{مجـ س ص}}{\text{مجـ س}^2}$ = $\frac{72}{28}$ = $\boxed{2.57}$

، أ = $\frac{\text{مجـ ص}}{\text{ن}}$ = $\frac{104}{7}$ = $\boxed{14.86}$

وعلى ذلك فإن معادله خط الاتجاه العام المقدرة هى:

ص = 14.86 + 2.57 س (بأساس 1997 ، س = سنه)

حساب القيم الاتجاهية للمبيعات في عام 2003 م:

الفارق الزمنى = 2003 – 1997 = 6 سنوات .

∴ ص = 14.86 + (2.57 × 6) = 30.28 ألف وحدة

∴ متوسط الربع = $\frac{30.28}{4}$ = 7.57

ومن هنا نستخدم هذا الرقم في تقدير المبيعات المتوقعة كل ربع سنة ، بعد حساب الرقم القياسى للمتغيرات الموسمية ، ويتضح ذلك مما يلي:

حساب الرقم القياسي للمتغيرات الموسمية:

يمكن حساب الرقم القياسي للمتغيرات الموسمية كما يلي:

الربع \ السنة	98	99	2000	المجموع الموسمي	الوسط الموسمي	النسب الموسمية
الأول	5	6	7	18	6	% 120
الثاني	6	7	8	21	7	% 140
الثالث	3	3	3	9	3	% 60
الرابع	4	3	5	12	4	% 80
المجموع					20	400

حيث أن: الوسط العام = $\frac{20}{400}$ = 5 %

∴ المبيعات المتوقعة في الربع الأول = 7.57 × $\frac{120}{100}$ = 9.08

∴ المبيعات المتوقعة في الربع الثاني = 7.57 × $\frac{140}{100}$ = 10.6

∴ المبيعات المتوقعة في الربع الثالث = 7.57 × $\frac{60}{100}$ = 4.54

∴ المبيعات المتوقعة في الربع الرابع = 7.57 × $\frac{80}{100}$ = 6.06

المجموع = 30.28

تمارين على الفصل الثالث

(1) فيما يلي تطور ظاهره معينه في الفترة الزمنية من 1991 وحتى 1998:-

السنة	91	92	93	94	95	96	97	1998
الظاهرة (ص)	8	16	14	26	30	40	36	54

المطلوب:

1- تقدير معادله خط الاتجاه العام بطريقه المربعات الصغرى ، مستخدما الطريقة المختصرة ؟

2- لإيجاد القيم المتوقعة للظاهرة (ص) في السنوات 2005 ، 2010 ؟

(2) فيما يلي بيان بالكميات المباعة (بآلاف الوحدات) لأحد مصانع الأدوية وذلك في الفترة الزمنية (1995 – 1999 م):

السنة	1995	1996	1997	1998	1999
المبيعات	2	4	10	8	16

المطلوب:

1- تقدير معادله خط الاتجاه العام بطريقه المربعات الصغرى ، مستخدما الطريقة المختصرة ؟

2- لإيجاد المبيعات المتوقعة في السنوات 2000 ، 2005 ، 2010 ؟

(3) فيما يلي بيان بالكميات المباعة (بآلاف الوحدات من المضادات الحيوية) لإحدى شركات الأدوية ، وذلك في الفترة الزمنية (1994 – 2000 م):

السنة / الموسم	1998	1999	2000
الشتاء	4	6	8
الربيع	5	8	9
الصيف	4	3	3
الخريف	2	3	5
المجموع	18	19	23

المطلوب:

1- تقدير الكميه المتوقع بيعها في عام 2003 م ، في كل موسم من المواسم الأربع لهذه السنة ؟ .

(4) إذا كان الرقم القياسى الربع سنوى للتغيرات الموسمية لإحدى الشركات كما يلي:

الربع الأول (70) ، الربع الثانى (80) ، الربع الثالث (120) ، الربع الرابع (130) ، فإذا كان من المتوقع أن تبلغ مبيعات هذه الشركات حوالى (40 مليون جنيه) في احد الأعوام القادمة. فهل يمكنك التنبؤ بقيمه المبيعات الربع سنوية للعام المذكور ؟.

(5) إذا كان الرقم القياسى الربع سنوى للتغيرات الموسمية لإحدى الشركات كما يلي:

الربع سنه	1	2	3	4
الرقم القياسى للتغيرات الموسمية	% 131.7	% 78	% 84.3	106

فإذا كان من المتوقع أن تبلغ مبيعات هذه الشركة حوالى (52 مليون جنيه) في احد الأعوام القادمة. المطلوب إيجاد المبيعات الربع سنوية للعام المذكور؟.

(6) الجدول التالى يمثل مبيعات احدى شركات التجميل (بآلاف الجنيهات) ، في المدة من 1998 إلى 2000 كل ربع سنه:

السنة	الربع الأول	الربع الثانى	الربع الثالث	الربع الرابع
1998	12	15	9	15
1999	15	9	12	12
2000	18	16	12	16

المطلوب:

حساب الرقم القياسى للتغيرات الموسمية (أو النسب الموسمية)؟.

(7) إذا كان تقدير معادله خط الاتجاه العام لإحدى الظواهر الاقتصادية هى:

ص = 5 + 2 س

حيث (س) هى الزمن مقاسا بوحدات ربع سنوية ابتداء من الربع الأول من سنه 2000 ، وكانت الظاهرة تتأثر بالعوامل الموسمية ، حيث بلغ المعامل الموسمى للربع الثانى من السنة (80 %) ، فما تقديرك لقيمه الظاهرة في الربع الثانى من سنه 2003؟.

(8) إذا كان تقدير معادله خط الاتجاه العام لإحدى الظواهر الاقتصادية هى:

ص = 3 + 4 س

حيث (س = ربع سنه) بأساس الربع الثانى من سنه 2000
وكانت الظاهرة تتأثر بالعوامل الموسمية ، حيث بلغ المعامل الموسمى للربع الثالث من السنة (120 %) ، المطلوب:

1- تقدير قيمه الظاهرة في الربع الأول من سنه 2003 م ؟ .
2- تقدير قيمه الظاهرة في النصف الأخير من سنه 2003 م ؟ .

(9) إذا كان تقدير معادله خط الاتجاه العام لإحدى الظواهر الاقتصادية هى:

ص = 3 + 2 س

حيث (س = سنه) بأساس سنه 1990
وكانت المعاملات الموسمية ، للمواسم الأربعة هى:

1.2 ، 2 ، 1.3 ، 0.8

المطلوب:

1- تقدير قيمه الظاهرة في الربع الثانى من سنه 2000 م ؟ .

2- تقدير قيمه الظاهرة في النصف الأخير من سنه 2001 ؟ .
مع الأخذ في الاعتبار التغيرات الموسمية ؟ .

(10) إذا كانت مستلزمات رأس المال العامل لإحدى الشركات عرضه للتقلبات الموسمية ويلاحظ في نفس الوقت اتجاه عام مستقر. ولكى تقوم الشركة بتقييم احتياجاتها من رأس المال العامل حيث الشركة خط اتجاه عام وأرقام موسميه وقد كانت معادله خط الاتجاه العام هى

10.000 + 1000 س حيث س تمثل ربع سنه وقيمتها = صفر في الربع الثانى من عام 2003 وكانت الأرقام الموسمية كالتالى:

الربع الأول 0.9 ، الربع الثانى 1.2 ، الربع الثالث 101 ، الربع الرابع 0.8 .

المطلوب:

إعداد كشف بمستلزمات رأس المال العامل المقدر لسنه 2005 .

الجداول الإحصائيـــــة

Statistical Tables

الجداول الإحصائيــــــــــــــــة

Statistical Tables

توزيـــــع ت					
	٠,٠١	٠,٠١	٠,٠٣	٠,٠٥	٠,١٠
١	٦٣,٦٦	٣١,٨٢	١٢,٧١	٦,٣١	٣,٠٨
٢	٩,٩٢	٦,٩٦	٤,٣٠	٢,٩٢	١,٨٩
٣	٥,٨٤	٤,٥٤	٣,١٨	٢,٣٥	١,٦٤
٤	٤,٦٠	٣,٧٥	٢,٧٨	٢,١٣	١,٥٣
٥	٤,٠٣	٣,٣٦	٢,٥٧	٢,٠٢	١,٤٨
٦	٣,٧١	٣,١٤	٢,٤٥	١,٩٤	١,٤٤
٧	٣,٥٠	٣,٠٠	٢,٣٦	١,٨٩	١,٤١
٨	٣,٣٦	٢,٩٠	٢,٣١	١,٨٦	١,٤٠
٩	٣,٢٥	٢,٨٢	٢,٢٦	١,٨٣	١,٣٨
١٠	٣,١٧	٢,٧٦	٢,٢٣	١,٨١	١,٣٧
١١	٣,١١	٢,٧٢	٢,٢٠	١,٨٠	١,٣٦
١٢	٣,٠٥	٢,٦٨	٢,١٨	١,٧٨	١,٣٦
١٣	٣,٠١	٢,٦٥	٢,١٦	١,٧٧	١,٣٥
١٤	٢,٩٨	٢,٦٢	٢,١٤	١,٧٦	١,٣٥
١٥	٢,٩٥	٢,٦٠	٢,١٣	١,٧٥	١,٣٤
١٦	٢,٩٢	٢,٥٨	٢,١٢	١,٧٥	١,٣٤
١٧	٢,٩٠	٢,٥٧	٢,١١	١,٧٤	١,٣٣
١٨	٢,٨٨	٢,٥٥	٢,١٠	١,٧٣	١,٣٣
١٩	٢,٨٦	٢,٥٤	٢,٠٩	١,٧٣	١,٣٣
٢٠	٢,٨٥	٢,٥٣	٢,٠٩	١,٧٢	١,٣٣
٢١	٢,٨٣	٢,٥٢	٢,٠٨	١,٧٢	١,٣٢
٢٢	٢,٨٢	٢,٥١	٢,٠٧	١,٧٢	١,٣٢
٢٣	٢,٨١	٢,٥٠	٢,٠٧	١,٧١	١,٣٢
٢٤	٢,٨٠	٢,٤٩	٢,٠٦	١,٧١	١,٣٢
٢٥	٢,٧٩	٢,٤٩	٢,٠٦	١,٧١	١,٣٢
٢٦	٢,٧٨	٢,٤٨	٢,٠٦	١,٧١	١,٣١
٢٧	٢,٧٧	٢,٤٧	٢,٠٥	١,٧٠	١,٣١
٢٨	٢,٧٦	٢,٤٧	٢,٠٥	١,٧٠	١,٣١
٢٩	٢,٧٦	٢,٤٦	٢,٠٥	١,٧٠	١,٣١
٣٠	٢,٧٥	٢,٤٦	٢,٠٤	١,٧٠	١,٣١

توزيـــــع مربع كاي					
	٠,٠١	٠,٠١	٠,٠٣	٠,٠٥	٠,١٠
١	٠,٠٠	٠,٠٠	٠,٠٠	٠,٠٠	٠,٠٢
٢	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٥	٠,١٠	٠,٢١
٣	٠,٠٧	٠,١١	٠,٢٢	٠,٣٥	٠,٥٨
٤	٠,٢١	٠,٣٠	٠,٤٨	٠,٧١	١,٠٦
٥	٠,٤١	٠,٥٥	٠,٨٣	١,١٥	١,٦١
٦	٠,٦٨	٠,٨٧	١,٢٤	١,٦٤	٢,٢٠
٧	٠,٩٩	١,٢٤	١,٦٩	٢,١٧	٢,٨٣
٨	١,٣٤	١,٦٥	٢,١٨	٢,٧٣	٣,٤٩
٩	١,٧٣	٢,٠٩	٢,٧٠	٣,٣٣	٤,١٧
١٠	٢,١٦	٢,٥٦	٣,٢٥	٣,٩٤	٤,٨٧
١١	٢,٦٠	٣,٠٥	٣,٨٢	٤,٥٧	٥,٥٨
١٢	٣,٠٧	٣,٥٧	٤,٤٠	٥,٢٣	٦,٣٠
١٣	٣,٥٧	٤,١١	٥,٠١	٥,٨٩	٧,٠٤
١٤	٤,٠٧	٤,٦٦	٥,٦٣	٦,٥٧	٧,٧٩
١٥	٤,٦٠	٥,٢٣	٦,٢٦	٧,٢٦	٨,٥٥
١٦	٥,١٤	٥,٨١	٦,٩١	٧,٩٦	٩,٣١
١٧	٥,٧٠	٦,٤١	٧,٥٦	٨,٦٧	١٠,٠٩
١٨	٦,٢٦	٧,٠١	٨,٢٣	٩,٣٩	١٠,٨٦
١٩	٦,٨٤	٧,٦٣	٨,٩١	١٠,١٢	١١,٦٥
٢٠	٧,٤٣	٨,٢٦	٩,٥٩	١٠,٨٥	١٢,٤٤
٢١	٨,٠٣	٨,٩٠	١٠,٢٨	١١,٥٩	١٣,٢٤
٢٢	٨,٦٤	٩,٥٤	١٠,٩٨	١٢,٣٤	١٤,٠٤
٢٣	٩,٢٦	١٠,٢٠	١١,٦٩	١٣,٠٩	١٤,٨٥
٢٤	٩,٨٩	١٠,٨٦	١٢,٤٠	١٣,٨٥	١٥,٦٦
٢٥	١٠,٥٢	١١,٥٢	١٣,١٢	١٤,٦١	١٦,٤٧
٢٦	١١,١٦	١٢,٢٠	١٣,٨٤	١٥,٣٨	١٧,٢٩
٢٧	١١,٨١	١٢,٨٨	١٤,٥٧	١٦,١٥	١٨,١١
٢٨	١٢,٤٦	١٣,٥٦	١٥,٣١	١٦,٩٣	١٨,٩٤
٢٩	١٣,١٢	١٤,٢٦	١٦,٠٥	١٧,٧١	١٩,٧٧
٣٠	١٣,٧٩	١٤,٩٥	١٦,٧٩	١٨,٤٩	٢٠,٦٠

الجداول الإحصائيـــــــــــــة

Statistical Tables

التوزيع الطبيعي المعياري

	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣٠	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠٠	٠,٠٠٠	٠,٠٠٤	٠,٠٠٨	٠,٠١٢	٠,٠١٦	٠,٠٢٠	٠,٠٢٤	٠,٠٢٨	٠,٠٣٢	٠,٠٣٦
٠,١٠	٠,٠٤٠	٠,٠٤٤	٠,٠٤٨	٠,٠٥٢	٠,٠٥٦	٠,٠٦٠	٠,٠٦٤	٠,٠٦٧	٠,٠٧١	٠,٠٧٥
٠,٢٠	٠,٠٧٩	٠,٠٨٣	٠,٠٨٧	٠,٠٩١	٠,٠٩٥	٠,٠٩٩	٠,١٠٣	٠,١٠٦	٠,١١٠	٠,١١٤
٠,٣٠	٠,١١٨	٠,١٢٢	٠,١٢٦	٠,١٢٩	٠,١٣٣	٠,١٣٧	٠,١٤١	٠,١٤٤	٠,١٤٨	٠,١٥٢
٠,٤٠	٠,١٥٥	٠,١٥٩	٠,١٦٣	٠,١٦٦	٠,١٧٠	٠,١٧٤	٠,١٧٧	٠,١٨١	٠,١٨٤	٠,١٨٨
٠,٥٠	٠,١٩١	٠,١٩٥	٠,١٩٨	٠,٢٠٢	٠,٢٠٥	٠,٢٠٩	٠,٢١٢	٠,٢١٦	٠,٢١٩	٠,٢٢٢
٠,٦٠	٠,٢٢٦	٠,٢٢٩	٠,٢٣٢	٠,٢٣٦	٠,٢٣٩	٠,٢٤٢	٠,٢٤٥	٠,٢٤٩	٠,٢٥٢	٠,٢٥٥
٠,٧٠	٠,٢٥٨	٠,٢٦١	٠,٢٦٤	٠,٢٦٧	٠,٢٧٠	٠,٢٧٣	٠,٢٧٦	٠,٢٧٩	٠,٢٨٢	٠,٢٨٥
٠,٨٠	٠,٢٨٨	٠,٢٩١	٠,٢٩٤	٠,٢٩٧	٠,٣٠٠	٠,٣٠٢	٠,٣٠٥	٠,٣٠٨	٠,٣١١	٠,٣١٣
٠,٩٠	٠,٣١٦	٠,٣١٩	٠,٣٢١	٠,٣٢٤	٠,٣٢٦	٠,٣٢٩	٠,٣٣١	٠,٣٣٤	٠,٣٣٦	٠,٣٣٩
١,٠٠	٠,٣٤١	٠,٣٤٤	٠,٣٤٦	٠,٣٤٨	٠,٣٥١	٠,٣٥٣	٠,٣٥٥	٠,٣٥٨	٠,٣٦٠	٠,٣٦٢
١,١٠	٠,٣٦٤	٠,٣٦٧	٠,٣٦٩	٠,٣٧١	٠,٣٧٣	٠,٣٧٥	٠,٣٧٧	٠,٣٧٩	٠,٣٨١	٠,٣٨٣
١,٢٠	٠,٣٨٥	٠,٣٨٧	٠,٣٨٩	٠,٣٩١	٠,٣٩٣	٠,٣٩٤	٠,٣٩٦	٠,٣٩٨	٠,٤٠٠	٠,٤٠١
١,٣٠	٠,٤٠٣	٠,٤٠٥	٠,٤٠٧	٠,٤٠٨	٠,٤١٠	٠,٤١١	٠,٤١٣	٠,٤١٥	٠,٤١٦	٠,٤١٨
١,٤٠	٠,٤١٩	٠,٤٢١	٠,٤٢٢	٠,٤٢٤	٠,٤٢٥	٠,٤٢٦	٠,٤٢٨	٠,٤٢٩	٠,٤٣١	٠,٤٣٢
١,٥٠	٠,٤٣٣	٠,٤٣٤	٠,٤٣٦	٠,٤٣٧	٠,٤٣٨	٠,٤٣٩	٠,٤٤١	٠,٤٤٢	٠,٤٤٣	٠,٤٤٤
١,٦٠	٠,٤٤٥	٠,٤٤٦	٠,٤٤٧	٠,٤٤٨	٠,٤٤٩	٠,٤٥١	٠,٤٥٢	٠,٤٥٣	٠,٤٥٤	٠,٤٥٤
١,٧٠	٠,٤٥٥	٠,٤٥٦	٠,٤٥٧	٠,٤٥٨	٠,٤٥٩	٠,٤٦٠	٠,٤٦١	٠,٤٦٢	٠,٤٦٢	٠,٤٦٣
١,٨٠	٠,٤٦٤	٠,٤٦٥	٠,٤٦٦	٠,٤٦٦	٠,٤٦٧	٠,٤٦٨	٠,٤٦٩	٠,٤٦٩	٠,٤٧٠	٠,٤٧١
١,٩٠	٠,٤٧١	٠,٤٧٢	٠,٤٧٣	٠,٤٧٣	٠,٤٧٤	٠,٤٧٤	٠,٤٧٥	٠,٤٧٦	٠,٤٧٦	٠,٤٧٧
٢,٠٠	٠,٤٧٧	٠,٤٧٨	٠,٤٧٨	٠,٤٧٩	٠,٤٧٩	٠,٤٨٠	٠,٤٨٠	٠,٤٨١	٠,٤٨١	٠,٤٨٢
٢,١٠	٠,٤٨٢	٠,٤٨٣	٠,٤٨٣	٠,٤٨٣	٠,٤٨٤	٠,٤٨٤	٠,٤٨٥	٠,٤٨٥	٠,٤٨٥	٠,٤٨٦
٢,٢٠	٠,٤٨٦	٠,٤٨٦	٠,٤٨٧	٠,٤٨٧	٠,٤٨٧	٠,٤٨٨	٠,٤٨٨	٠,٤٨٨	٠,٤٨٩	٠,٤٨٩
٢,٣٠	٠,٤٨٩	٠,٤٩٠	٠,٤٩٠	٠,٤٩٠	٠,٤٩٠	٠,٤٩١	٠,٤٩١	٠,٤٩١	٠,٤٩١	٠,٤٩٢
٢,٤٠	٠,٤٩٢	٠,٤٩٢	٠,٤٩٢	٠,٤٩٢	٠,٤٩٣	٠,٤٩٣	٠,٤٩٣	٠,٤٩٣	٠,٤٩٣	٠,٤٩٤
٢,٥٠	٠,٤٩٤	٠,٤٩٤	٠,٤٩٤	٠,٤٩٤	٠,٤٩٤	٠,٤٩٥	٠,٤٩٥	٠,٤٩٥	٠,٤٩٥	٠,٤٩٥
٢,٦٠	٠,٤٩٥	٠,٤٩٥	٠,٤٩٦	٠,٤٩٦	٠,٤٩٦	٠,٤٩٦	٠,٤٩٦	٠,٤٩٦	٠,٤٩٦	٠,٤٩٦
٢,٧٠	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧	٠,٤٩٧
٢,٨٠	٠,٤٩٧	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨
٢,٩٠	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٨	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩
٣,٠٠	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩	٠,٤٩٩

توزيـــــع ف (مستوى المعنوية = ٠,٠٥)

	١,٠٠	٢,٠٠	٣,٠٠	٤,٠٠	٥,٠٠	٦,٠٠	٧,٠٠	٨,٠٠	٩,٠٠	١٠,٠٠	١١,٠٠	١٢,٠٠	١٣,٠٠	١٤,٠٠	١٥,٠٠	١٦,٠٠	١٧,٠٠	١٨,٠٠	١٩,٠٠	٢٠,٠٠
١,٠٠	١٦١,٤٥	١٩٩,٥٠	٢١٥,٧١	٢٢٤,٥٨	٢٣٠,١٦	٢٣٣,٩٩	٢٣٦,٧٧	٢٣٨,٨٨	٢٤٠,٥٤	٢٤١,٨٨	٢٤٢,٩٨	٢٤٣,٩٠	٢٤٤,٦٩	٢٤٥,٣٦	٢٤٥,٩٥	٢٤٦,٤٧	٢٤٦,٩٢	٢٤٧,٣٢	٢٤٧,٦٩	٢٤٨,٠٢
٢,٠٠	١٨,٥١	١٩,٠٠	١٩,١٦	١٩,٢٥	١٩,٣٠	١٩,٣٣	١٩,٣٥	١٩,٣٧	١٩,٣٨	١٩,٤٠	١٩,٤٠	١٩,٤١	١٩,٤٢	١٩,٤٢	١٩,٤٣	١٩,٤٣	١٩,٤٤	١٩,٤٤	١٩,٤٤	١٩,٤٥
٣,٠٠	١٠,١٣	٩,٥٥	٩,٢٨	٩,١٢	٩,٠١	٨,٩٤	٨,٨٩	٨,٨٥	٨,٨١	٨,٧٩	٨,٧٦	٨,٧٤	٨,٧٣	٨,٧١	٨,٧٠	٨,٦٩	٨,٦٨	٨,٦٧	٨,٦٧	٨,٦٦
٤,٠٠	٧,٧١	٦,٩٤	٦,٥٩	٦,٣٩	٦,٢٦	٦,١٦	٦,٠٩	٦,٠٤	٦,٠٠	٥,٩٦	٥,٩٤	٥,٩١	٥,٨٩	٥,٨٧	٥,٨٦	٥,٨٤	٥,٨٣	٥,٨٢	٥,٨١	٥,٨٠
٥,٠٠	٦,٦١	٥,٧٩	٥,٤١	٥,١٩	٥,٠٥	٤,٩٥	٤,٨٨	٤,٨٢	٤,٧٧	٤,٧٤	٤,٧٠	٤,٦٨	٤,٦٦	٤,٦٤	٤,٦٢	٤,٦٠	٤,٥٩	٤,٥٨	٤,٥٧	٤,٥٦
٦,٠٠	٥,٩٩	٥,١٤	٤,٧٦	٤,٥٣	٤,٣٩	٤,٢٨	٤,٢١	٤,١٥	٤,١٠	٤,٠٦	٤,٠٣	٤,٠٠	٣,٩٨	٣,٩٦	٣,٩٤	٣,٩٢	٣,٩١	٣,٩٠	٣,٨٨	٣,٨٧
٧,٠٠	٥,٥٩	٤,٧٤	٤,٣٥	٤,١٢	٣,٩٧	٣,٨٧	٣,٧٩	٣,٧٣	٣,٦٨	٣,٦٤	٣,٦٠	٣,٥٧	٣,٥٥	٣,٥٣	٣,٥١	٣,٤٩	٣,٤٨	٣,٤٧	٣,٤٦	٣,٤٤
٨,٠٠	٥,٣٢	٤,٤٦	٤,٠٧	٣,٨٤	٣,٦٩	٣,٥٨	٣,٥٠	٣,٤٤	٣,٣٩	٣,٣٥	٣,٣١	٣,٢٨	٣,٢٦	٣,٢٤	٣,٢٢	٣,٢٠	٣,١٩	٣,١٧	٣,١٦	٣,١٥
٩,٠٠	٥,١٢	٤,٢٦	٣,٨٦	٣,٦٣	٣,٤٨	٣,٣٧	٣,٢٩	٣,٢٣	٣,١٨	٣,١٤	٣,١٠	٣,٠٧	٣,٠٥	٣,٠٣	٣,٠١	٢,٩٩	٢,٩٧	٢,٩٦	٢,٩٥	٢,٩٤
١٠,٠٠	٤,٩٦	٤,١٠	٣,٧١	٣,٤٨	٣,٣٣	٣,٢٢	٣,١٤	٣,٠٧	٣,٠٢	٢,٩٨	٢,٩٤	٢,٩١	٢,٨٩	٢,٨٦	٢,٨٥	٢,٨٣	٢,٨١	٢,٨٠	٢,٧٩	٢,٧٧
١١,٠٠	٤,٨٤	٣,٩٨	٣,٥٩	٣,٣٦	٣,٢٠	٣,٠٩	٣,٠١	٢,٩٥	٢,٩٠	٢,٨٥	٢,٨٢	٢,٧٩	٢,٧٦	٢,٧٤	٢,٧٢	٢,٧٠	٢,٦٩	٢,٦٧	٢,٦٦	٢,٦٥
١٢,٠٠	٤,٧٥	٣,٨٩	٣,٤٩	٣,٢٦	٣,١١	٣,٠٠	٢,٩١	٢,٨٥	٢,٨٠	٢,٧٥	٢,٧٢	٢,٦٩	٢,٦٦	٢,٦٤	٢,٦٢	٢,٦٠	٢,٥٨	٢,٥٧	٢,٥٦	٢,٥٤
١٣,٠٠	٤,٦٧	٣,٨١	٣,٤١	٣,١٨	٣,٠٣	٢,٩٢	٢,٨٣	٢,٧٧	٢,٧١	٢,٦٧	٢,٦٣	٢,٦٠	٢,٥٨	٢,٥٥	٢,٥٣	٢,٥١	٢,٥٠	٢,٤٨	٢,٤٧	٢,٤٦
١٤,٠٠	٤,٦٠	٣,٧٤	٣,٣٤	٣,١١	٢,٩٦	٢,٨٥	٢,٧٦	٢,٧٠	٢,٦٥	٢,٦٠	٢,٥٧	٢,٥٣	٢,٥١	٢,٤٨	٢,٤٦	٢,٤٤	٢,٤٣	٢,٤١	٢,٤٠	٢,٣٩
١٥,٠٠	٤,٥٤	٣,٦٨	٣,٢٩	٣,٠٦	٢,٩٠	٢,٧٩	٢,٧١	٢,٦٤	٢,٥٩	٢,٥٤	٢,٥١	٢,٤٨	٢,٤٥	٢,٤٢	٢,٤٠	٢,٣٨	٢,٣٧	٢,٣٥	٢,٣٤	٢,٣٣
١٦,٠٠	٤,٤٩	٣,٦٣	٣,٢٤	٣,٠١	٢,٨٥	٢,٧٤	٢,٦٦	٢,٥٩	٢,٥٤	٢,٤٩	٢,٤٦	٢,٤٢	٢,٤٠	٢,٣٧	٢,٣٥	٢,٣٣	٢,٣٢	٢,٣٠	٢,٢٩	٢,٢٨
١٧,٠٠	٤,٤٥	٣,٥٩	٣,٢٠	٢,٩٦	٢,٨١	٢,٧٠	٢,٦١	٢,٥٥	٢,٤٩	٢,٤٥	٢,٤١	٢,٣٨	٢,٣٥	٢,٣٣	٢,٣١	٢,٢٩	٢,٢٧	٢,٢٦	٢,٢٤	٢,٢٣
١٨,٠٠	٤,٤١	٣,٥٥	٣,١٦	٢,٩٣	٢,٧٧	٢,٦٦	٢,٥٨	٢,٥١	٢,٤٦	٢,٤١	٢,٣٧	٢,٣٤	٢,٣١	٢,٢٩	٢,٢٧	٢,٢٥	٢,٢٣	٢,٢٢	٢,٢٠	٢,١٩
١٩,٠٠	٤,٣٨	٣,٥٢	٣,١٣	٢,٩٠	٢,٧٤	٢,٦٣	٢,٥٤	٢,٤٨	٢,٤٢	٢,٣٨	٢,٣٤	٢,٣١	٢,٢٨	٢,٢٦	٢,٢٣	٢,٢١	٢,٢٠	٢,١٨	٢,١٧	٢,١٦
٢٠,٠٠	٤,٣٥	٣,٤٩	٣,١٠	٢,٨٧	٢,٧١	٢,٦٠	٢,٥١	٢,٤٥	٢,٣٩	٢,٣٥	٢,٣١	٢,٢٨	٢,٢٥	٢,٢٢	٢,٢٠	٢,١٨	٢,١٧	٢,١٥	٢,١٤	٢,١٢
٢١,٠٠	٤,٣٢	٣,٤٧	٣,٠٧	٢,٨٤	٢,٦٨	٢,٥٧	٢,٤٩	٢,٤٢	٢,٣٧	٢,٣٢	٢,٢٨	٢,٢٥	٢,٢٢	٢,٢٠	٢,١٨	٢,١٦	٢,١٤	٢,١٢	٢,١١	٢,١٠
٢٢,٠٠	٤,٣٠	٣,٤٤	٣,٠٥	٢,٨٢	٢,٦٦	٢,٥٥	٢,٤٦	٢,٤٠	٢,٣٤	٢,٣٠	٢,٢٦	٢,٢٣	٢,٢٠	٢,١٧	٢,١٥	٢,١٣	٢,١١	٢,١٠	٢,٠٨	٢,٠٧
٢٣,٠٠	٤,٢٨	٣,٤٢	٣,٠٣	٢,٨٠	٢,٦٤	٢,٥٣	٢,٤٤	٢,٣٧	٢,٣٢	٢,٢٧	٢,٢٤	٢,٢٠	٢,١٨	٢,١٥	٢,١٣	٢,١١	٢,٠٩	٢,٠٨	٢,٠٦	٢,٠٥
٢٤,٠٠	٤,٢٦	٣,٤٠	٣,٠١	٢,٧٨	٢,٦٢	٢,٥١	٢,٤٢	٢,٣٦	٢,٣٠	٢,٢٥	٢,٢٢	٢,١٨	٢,١٥	٢,١٣	٢,١١	٢,٠٩	٢,٠٧	٢,٠٥	٢,٠٤	٢,٠٣
٢٥,٠٠	٤,٢٤	٣,٣٩	٢,٩٩	٢,٧٦	٢,٦٠	٢,٤٩	٢,٤٠	٢,٣٤	٢,٢٨	٢,٢٤	٢,٢٠	٢,١٦	٢,١٤	٢,١١	٢,٠٩	٢,٠٧	٢,٠٥	٢,٠٤	٢,٠٢	٢,٠١
٢٦,٠٠	٤,٢٣	٣,٣٧	٢,٩٨	٢,٧٤	٢,٥٩	٢,٤٧	٢,٣٩	٢,٣٢	٢,٢٧	٢,٢٢	٢,١٨	٢,١٥	٢,١٢	٢,٠٩	٢,٠٧	٢,٠٥	٢,٠٣	٢,٠٢	٢,٠٠	١,٩٩
٢٧,٠٠	٤,٢١	٣,٣٥	٢,٩٦	٢,٧٣	٢,٥٧	٢,٤٦	٢,٣٧	٢,٣١	٢,٢٥	٢,٢٠	٢,١٧	٢,١٣	٢,١٠	٢,٠٨	٢,٠٦	٢,٠٤	٢,٠٢	٢,٠٠	١,٩٩	١,٩٧
٢٨,٠٠	٤,٢٠	٣,٣٤	٢,٩٥	٢,٧١	٢,٥٦	٢,٤٥	٢,٣٦	٢,٢٩	٢,٢٤	٢,١٩	٢,١٥	٢,١٢	٢,٠٩	٢,٠٦	٢,٠٤	٢,٠٢	٢,٠٠	١,٩٩	١,٩٧	١,٩٦
٢٩,٠٠	٤,١٨	٣,٣٣	٢,٩٣	٢,٧٠	٢,٥٥	٢,٤٣	٢,٣٥	٢,٢٨	٢,٢٢	٢,١٨	٢,١٤	٢,١٠	٢,٠٨	٢,٠٥	٢,٠٣	٢,٠١	١,٩٩	١,٩٧	١,٩٦	١,٩٤
٣٠,٠٠	٤,١٧	٣,٣٢	٢,٩٢	٢,٦٩	٢,٥٣	٢,٤٢	٢,٣٣	٢,٢٧	٢,٢١	٢,١٦	٢,١٣	٢,٠٩	٢,٠٦	٢,٠٤	٢,٠١	١,٩٩	١,٩٨	١,٩٦	١,٩٥	١,٩٣

